ser mejor

Matemáticas 2

Roberto Villaseñor Spreitzer
Víctor Manuel García Montes
José Luis Hernández Palomino

ESFINGE

DIRECCIÓN GENERAL	▸ Gabriel Torres Messina
DIRECCIÓN EDITORIAL BÁSICA	▸ Rosa María Núñez Ochoa
COORDINACIÓN EDITORIAL	▸ Leoncio Montiel Mejía
EDICIÓN	▸ Sharon Magali Valverde Esparza
LECTURAS	▸ Hugo Fernández Alonso
DISEÑO DE PORTADA	▸ Krystel Galván Hernández
DISEÑO DE INTERIORES	▸ Krystel Galván Hernández
COORDINACIÓN DE DISEÑO	▸ Krystel Galván Hernández
DIAGRAMACIÓN	▸ Rocío Mabarak Pensado
ILUSTRACIÓN	▸ Rocío Mabarak Pensado y Shutterstock
FOTOGRAFÍA	▸ Shutterstock y Archivo Esfinge
COORDINACIÓN DE PREPRENSA	▸ Noé Brito Castro

Matemáticas 2. Serie Ser mejor

ISBN: Pendiente

Primera edición: 2019

Impreso en México
Printed in Mexico

Presentación
A los alumnos

Estimado alumno, estimada alumna:

El libro que tienes en tus manos es una obra diseñada especialmente para ayudarte en el estudio y aprendizaje de las matemáticas pensando en tu curiosidad y en la disposición para enfrentarte a nuevos retos. Para ello se han incluido actividades que te harán pensar, reflexionar, argumentar y comparar tus respuestas.

En esta obra se busca que puedas aprender por ti mismo, lo que no significa que debes aprender solo. Es muy importante que te involucres en las actividades que se te plantean y las compartas con tus compañeros; de esta manera estarás en posibilidades de darte cuenta de tus aciertos o errores, y buscar la manera de solucionarlos para continuar con el aprendizaje.

En este proceso equivocarse es normal, porque así puedes analizar el porqué, y es cuando justamente se da el aprendizaje con sentido, es decir, cuando descubres cuál fue el error cometido y buscas la manera de corregirlo y superar los obstáculos. Para esto, es muy importante tu perseverancia en la resolución de cada problema, porque así, tú como tu profesor podrán darse cuenta de cuáles son las dificultades que tienes y de esta manera él te apoyará para superarlas. Ésta es la mejor forma de que tu profesor puede obtener información sobre tus ideas, concepciones, conocimientos, dificultades, etcétera. Sin embargo, no esperes que él te proporcione la respuesta; solamente te apoyará en el camino para encontrarla.

Los problemas o actividades que se plantean en cada lección están diseñados para que al utilizar los conocimientos que tienes, accedas a nuevos conocimientos cada vez más complejos. Por eso se te pide que los resuelvas ya sea de manera individual, en parejas o en equipos, según se indica en cada uno de ellos.

Debes tener presente que confrontar tus procedimientos y respuestas con tus compañeros (siempre con atención y respeto) favorece tu aprendizaje, porque de ellos aprenderás lo que te puede ser útil y lo que no da resultado. De este modo se enriquecerán entre sí con diversos puntos de vista.

Al realizar las actividades en las lecciones tendrás también la oportunidad de explorar el fascinante mundo de las matemáticas. Esperamos que esto te permita ver que las matemáticas son una forma interesante y útil de conocer la realidad y que están presentes en cualquier ámbito de la vida.

Deseamos que alcances el mayor de los éxitos.

Los autores

Índice

Presentación 3

Conoce tu libro 7

T1 Trimestre 1 10

Lección	Contenido	Aprendizaje esperado	Tema	Eje	Página
1. ¿Qué conviene?	Multiplicación con fracciones y decimales positivos	Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.	Multiplicación y división	Número, álgebra y variación	12
2. ¿Operaciones inversas?	División con fracciones y decimales positivos				18
3. ¡Jugando con todos!	Multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos	Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones, y decimales positivos y negativos.			25
4. Contagios peligrosos	Potencias y raíz cuadrada	Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas.			36
5. Contagios	Productos y cocientes de potencias				46
6. Un reparto justo	Resuelve problemas de reparto proporcional	Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.	Proporcionalidad		53
7. Más pasos, misma distancia	Identifica situaciones de proporcionalidad directa e inversa, utilizando tablas de variación				59
8. Modelos gráficos	Sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Método gráfico		Ecuaciones	Número, álgebra y variación	65
9. Cuestión de balanceo	Sistema de ecuaciones con dos incógnitas. Método de igualación y sustitución	Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.			74
10. ¿Quién lee más?	Variación lineal y proporcionalidad inversa, por medio de tablas y expresiones algebraicas	Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.	Funciones		81
11. Cortando el pastel	Variación lineal y resolución de problemas de proporcionalidad inversa, utilizando tanto tablas como expresiones algebraicas y gráficas				88
Evaluación					100

T2 Trimestre 2 104

Lección	Contenido	Aprendizaje esperado	Tema	Eje	Página
12. Reglas equivalentes	Equivalencia de expresiones de primer grado	Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.	Patrones, figuras geométricas y expresiones equivalentes	Número, álgebra y variación	106
13. ¿Somos iguales?	Expresiones algebraicas para representar áreas y perímetros de figuras geométricas	Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de figuras).			114
14. Diagonales en polígonos	Número de diagonales desde un vértice. Número de diagonales en total	Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.	Figuras y cuerpos geométricos	Forma, espacio y medida	122
15. Ángulos en polígonos	Suma de ángulos interiores en polígonos; ángulos interiores, exteriores y ángulo central. Relación entre los ángulos central, interior y exterior				130
16. Construcción de polígonos	Resolver problemas de construcción de polígonos regulares con instrumentos geométricos a partir de diferentes datos				140
17. Los polígonos que cubren un plano	Polígonos que cubren el plano. Análisis de la construcción de mosaicos (teselados) usando polígonos regulares e irregulares				146
18. La forma de medir	Sistema Internacional de Medidas, conversión de unidades	Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).	Magnitudes y medidas		154
19. El Sistema Inglés	Sistema Inglés, conversión de unidades				159
20. De un sistema a otro	Conversión de unidades entre sistemas				163
21. Solamente el contorno	Perímetro de polígonos regulares e irregulares. Perímetro del círculo	Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.			167
22. El área de una superficie	Uso de las fórmulas del cálculo de área de triángulos y cuadriláteros para calcular el área de polígonos irregulares y regulares				174
23. El área del círculo	Cálculo del área del círculo			Forma, espacio y medida	180
Evaluación					186

T3 Trimestre 3 190

Lección	Contenido	Aprendizaje esperado	Tema	Eje	Página
24. Prismas y cilindros	Construcción de los prismas y el cilindro	Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.	Magnitudes y medidas	Forma, espacio y medida	192
25. Calcula lo que falta	Cálculo del volumen de prismas con base regular y el cilindro. Cálculo de alguna de sus dimensiones, dados algunos datos				200
26. ¿Quién salta más?	Elabora y lee tablas de frecuencias con datos agrupados, así como histogramas	Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.	Estadística	Análisis de datos	207
27. ¿Cómo te comunicas?	Elabora y lee polígonos de frecuencia y gráficas de línea, a partir de tablas de frecuencias				217
28. Que el trayecto sea breve	Descripción de conjuntos de datos mediante sus medidas de tendencia central, rango y desviación media	Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.			226
29. ¿Qué va a salir?	Experimentos aleatorios y probabilidad teórica; comparación con probabilidad frecuencial	Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.	Probabilidad		234
Evaluación					242

Bibliografía 244

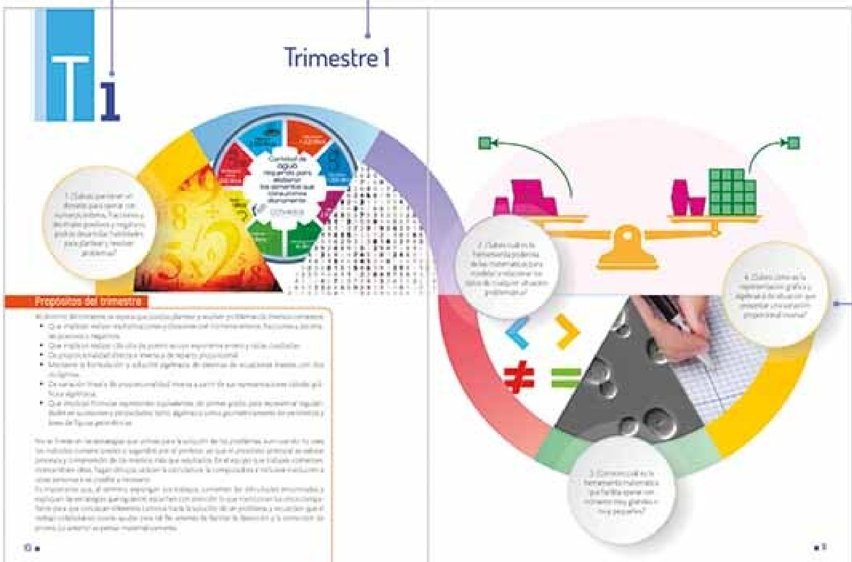
Conoce tu libro

Con la finalidad de que conozcas paso a paso tu libro, a continuación te presentamos las secciones que lo integran.

Número del trimestre

Título del trimestre

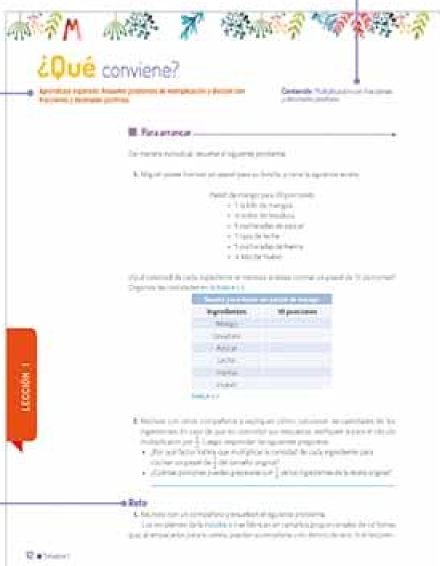
Propósitos del trimestre. Lo que se espera que logres al terminar el estudio de los contenidos del este periodo.



Preguntas para reflexionar en relación con conocimientos previos.

Aprendizaje esperado

Contenido programático



Reto. Una vez que has resuelto el problema o ejercicio de entrada, se plantea otro problema en un contexto interesante o conocido que involucra un reto mayor al presentado anteriormente.

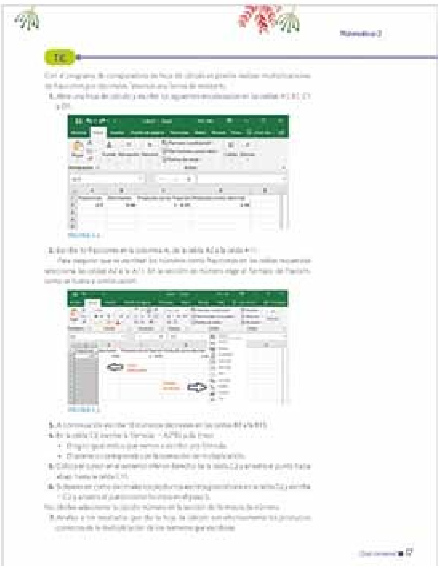
Relaciónalo. Referencia a conocimientos previos o a la relación con otras materias o temas de importancia.

Pistas. Esta sección pretende orientar tu razonamiento por alguno de los caminos que llevan a la solución del problema.

Para analizar. Desarrollo de la solución del problema planteado en el Reto.

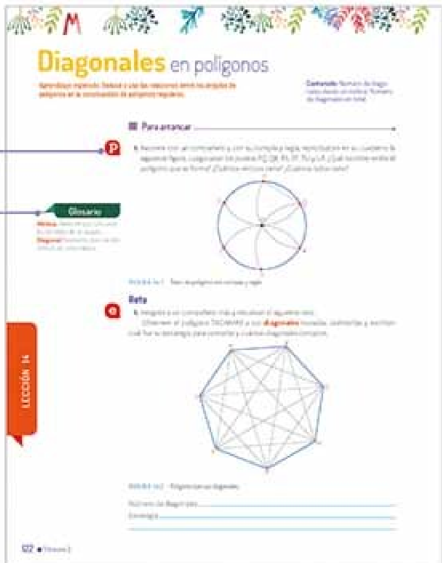
Un nuevo reto. Se presenta otro problema que involucre el contenido objeto de la lección.

Trabajo en equipo e



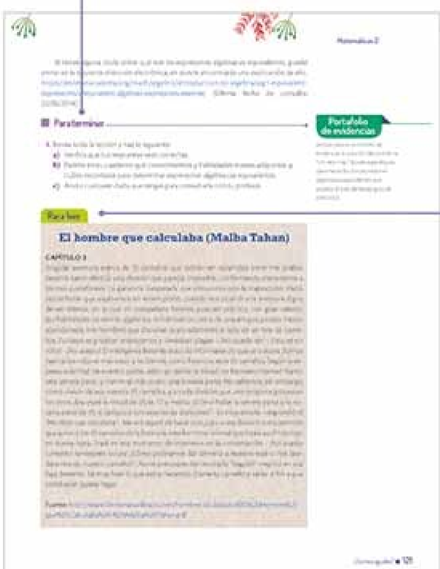
TIC. Relaciona los contenidos matemáticos con la posibilidad de darles un tratamiento con el uso de la tecnología o se pide que se consulte algún sitio de internet relacionado con el tema de estudio.

Trabajo en parejas. P



Glosario.

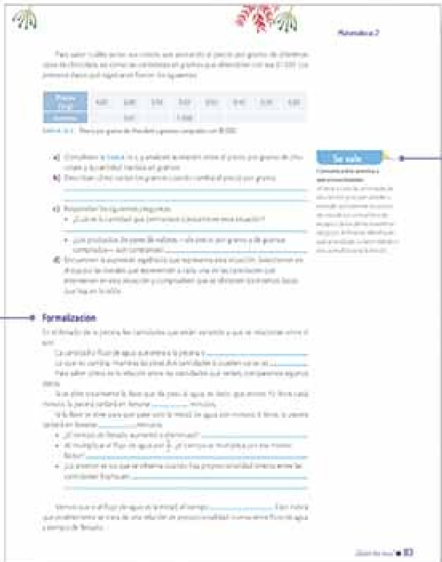
Para terminar. En esta tercera y última parte de la lección, se solicita que registres de manera individual qué partes de la lección consideras como aprendizajes logrados y en cuáles aún tienes dudas o tu aprendizaje es parcial.



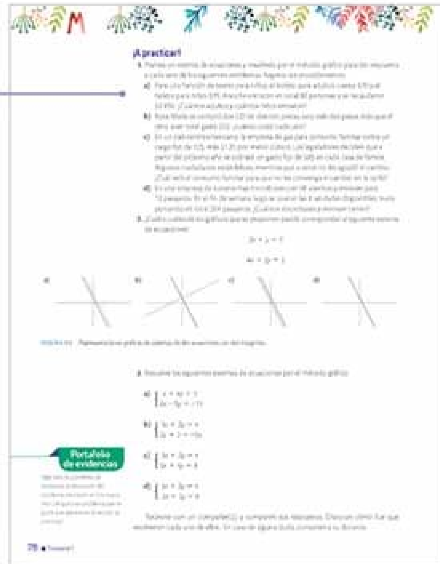
Para leer. Se recomiendan algunas lecturas que guarden alguna relación con el tema de estudio.

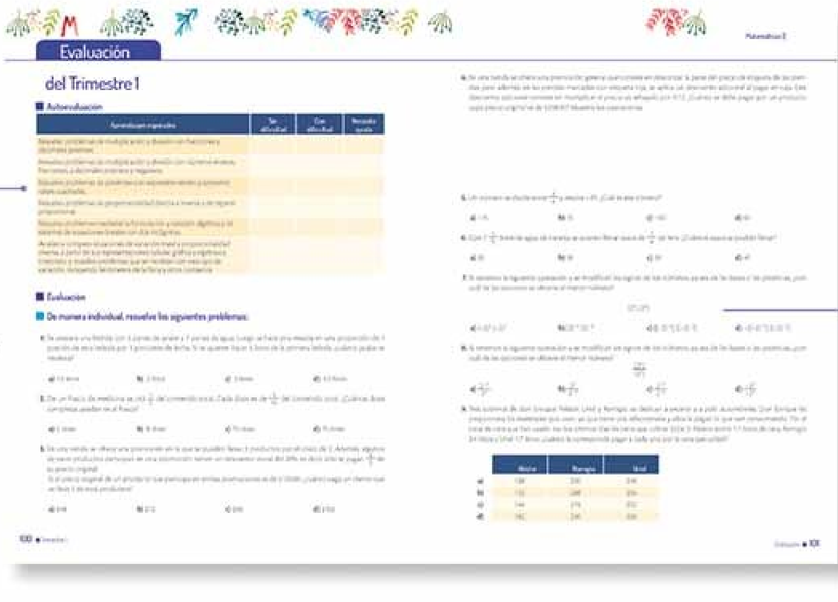
¡A practicar! Una vez que la formalización del tema se ha comprendido, esta sección tiene como propósito que desarrolles ciertas habilidades y pongas a prueba las estrategias de solución recientemente adquiridas.

Formalización. Se te invita a reflexionar sobre la resolución de los problemas anteriores, procurando que construyas tus conclusiones de la lección.



Se vale. Se incorporan sugerencias o reflexiones vinculadas con la Educación socioemocional.

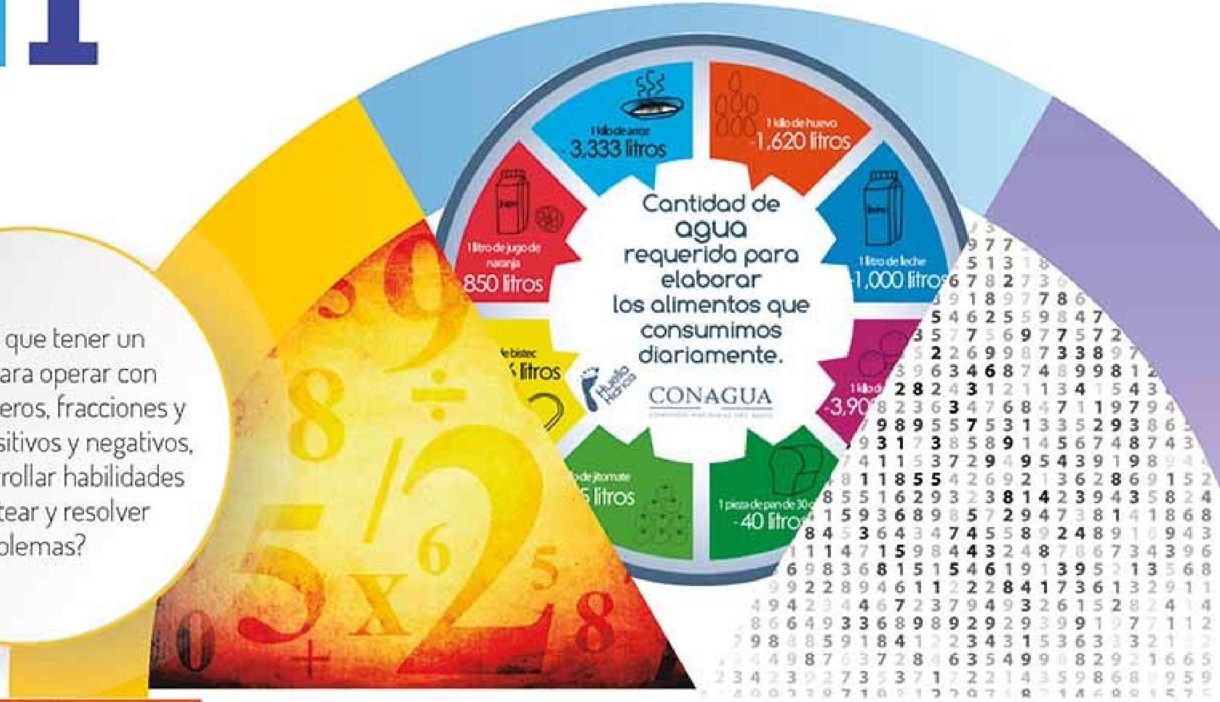




Reactivos de evaluación formativa.

Tabla de autoevaluación donde se resumen los aprendizajes esperados y una valoración por tu parte sobre tu nivel de logro aproximado en cada aprendizaje esperado del trimestre

Trimestre 1



1. ¿Sabías que tener un dominio para operar con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos, podrás desarrollar habilidades para plantear y resolver problemas?

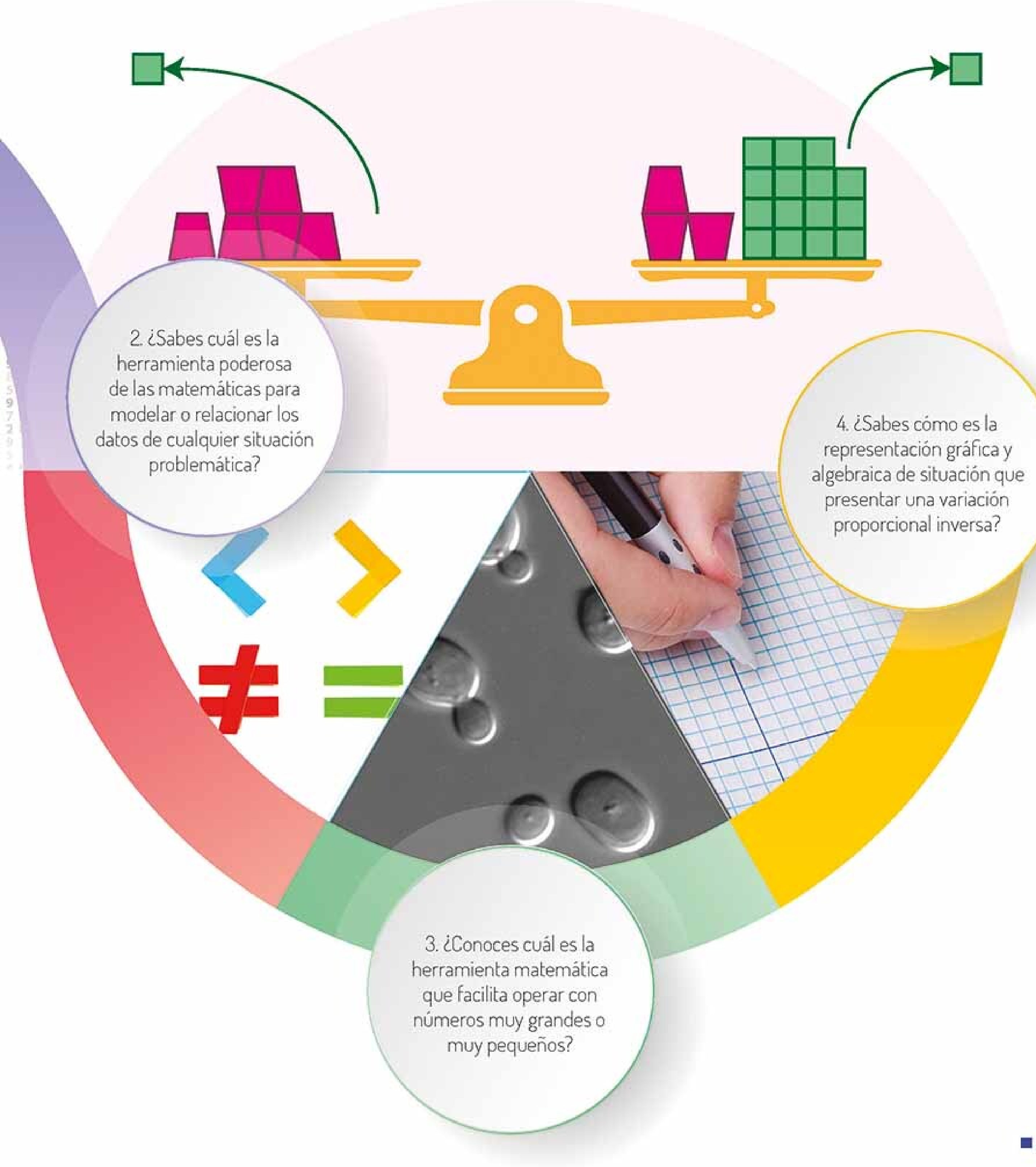
Propósitos del trimestre

Al término del trimestre, se espera que puedas plantear y resolver problemas de diversos contextos:

- Que implican realizar multiplicaciones y divisiones con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos.
- Que implican realizar cálculos de potencias con exponente entero y raíces cuadradas.
- De proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.
- Mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- De variación lineal y de proporcionalidad inversa a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica.
- Que implican formular expresiones equivalentes, de primer grado, para representar regularidades en sucesiones y propiedades, tanto algebraica como geométricamente de perímetros y áreas de figuras geométricas.

No te limites en las estrategias que utilices para la solución de los problemas, aun cuando no uses los métodos convencionales o sugeridos por el profesor, ya que el propósito principal es valorar procesos y comprensión de los mismos, más que resultados. En el equipo que trabajes, comenten, intercambien ideas, hagan dibujos, utilicen la calculadora, la computadora e inclusive involucren a otras personas si es posible y necesario.

Es importante que, al término, expongan sus trabajos, comenten las dificultades encontradas y expliquen las estrategias que siguieron, escuchen con atención lo que mencionan los otros compañeros para que conozcan diferentes caminos hacia la solución de un problema y recuerden que el trabajo colaborativo puede ayudar para tal fin, además de facilitar la detección y la corrección de errores. Lo anterior es pensar matemáticamente.



2. ¿Sabes cuál es la herramienta poderosa de las matemáticas para modelar o relacionar los datos de cualquier situación problemática?

3. ¿Conoces cuál es la herramienta matemática que facilita operar con números muy grandes o muy pequeños?

4. ¿Sabes cómo es la representación gráfica y algebraica de situación que presentar una variación proporcional inversa?

¿Qué conviene?

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Contenido: Multiplicación con fracciones y decimales positivos

Para arrancar

De manera individual, resuelve el siguiente problema.

1. Miguel quiere hornear un pastel para su familia, y tiene la siguiente receta:

Pastel de mango para 20 porciones

- 1 ½ kilo de mangos
- ½ sobre de levadura
- 5 cucharadas de azúcar
- 1 taza de leche
- 5 cucharadas de harina
- ¼ kilo de huevo

¿Qué cantidad de cada ingrediente se requiere si necesita cocinar un pastel de 10 porciones? Organiza las cantidades en la **TABLA 1.1**.

Receta para hacer un pastel de mango	
Ingredientes	**10 porciones**
Mango	
Levadura	
Azúcar	
Leche	
Harina	
Huevo	

TABLA 1.1 Ingredientes para elaborar un pastel de mango de 10 porciones.

2. Reúnete con otros compañeros y expliquen cómo calcularon las cantidades de los ingredientes. En caso de que no coincidan sus respuestas, verifiquen si para el cálculo multiplicaron por $\frac{1}{2}$ o dividieron entre 2. Luego, respondan las siguientes preguntas.

- ¿Por qué factor habría que multiplicar la cantidad de cada ingrediente para cocinar un pastel de $\frac{1}{2}$ del tamaño original?
- ¿Multiplicar por $\frac{1}{2}$ es lo mismo que dividir entre 2?
- ¿Cuántas porciones pueden prepararse con $\frac{1}{4}$ de los ingredientes de la receta original?

Reto

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

Los recipientes de la **FIGURA 1.1** se fabrican en tamaños proporcionales de tal forma que, al empacarlos para su venta, puedan acomodarse uno dentro de otro. Si el recipien-

LECCIÓN 1

te 2 tiene un tamaño proporcional de $\frac{4}{5}$ respecto del tamaño del recipiente 1, ¿cuáles son sus dimensiones?

FIGURA 1.1 Contenedores de plástico.

a) En el equipo de Víctor están Andrea y Julio. Ellos discuten de la siguiente manera:

- Julio: Lo que no me queda claro es qué quiere decir "el recipiente 2 tiene un tamaño proporcional de $\frac{4}{5}$ respecto del tamaño del recipiente 1".
- Víctor: Pues que sus dimensiones disminuyen proporcionalmente $\frac{4}{5}$ partes de las dimensiones del recipiente 1.
- Andrea: ¿Quiere decir que sus dimensiones representan $\frac{4}{5}$ de las dimensiones del recipiente 1?
- Víctor: Pues sí.
- Julio: Pero entonces, ¿qué operaciones tenemos qué hacer, una resta?
- Víctor: Cuando calculas una fracción de una cantidad, lo que haces es una multiplicación, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ de 20 es $20 \times \frac{3}{4}$.
- Andrea: Estoy de acuerdo, pero ¿cómo multiplicas veinte por tres cuartos?
- Julio: Yo sí me acuerdo, veinte por tres cuartos significa que debes sumar veinte veces tres cuartos, esto equivale a multiplicar veinte por tres y el resultado lo divides entre cuatro.
- Víctor: Bueno, sí, pero también se podría expresar la fracción como número decimal y luego hacer la multiplicación, es decir, cero punto setenta y cinco por veinte.
- Andrea: ¡Claro! Tienes razón, Víctor.
- Julio: El asunto es cómo calculamos las dimensiones de los dos recipientes, lo que podemos decir de inmediato es que las dimensiones del recipiente 2 serán menores que las del recipiente 1.

b) Analicen con cuál de las siguientes operaciones es posible calcular la altura del recipiente 2. Subráyenla y justifiquen su respuesta.

$7.5 + \frac{4}{5}$ $\qquad$ $7.5 - \frac{4}{5}$ $\qquad$ $7.5 \times \frac{4}{5}$ $\qquad$ $7.5 \div \frac{4}{5}$

c) ¿Cuál es el resultado de la operación que eligieron? ________________

d) ¿Cuál es la altura del recipiente 2? ________________

2. Reúnanse con otra pareja de compañeros, comparen los procedimientos que siguieron para calcular las dimensiones del recipiente y expresen las razones por las que usaron dicho procedimiento. Al terminar, resuelvan en siguiente problema: Si el recipiente 3 también guarda una proporción de $\frac{4}{5}$ respecto del recipiente 2, ¿cuáles son sus dimensiones?

Pistas

En parejas discutan sobre el diálogo que tuvieron Víctor, Andrea y Julio.

- ¿Qué operación se tiene que hacer para calcular una fracción de una cantidad?
- ¿Cuál es el procedimiento que ustedes seguirían?
- ¿Están de acuerdo en que una fracción se puede escribir como un decimal, y un decimal, como una fracción?
- ¿Cómo se transforma una fracción a decimal? Describan el procedimiento y digan a qué decimal equivale $\frac{4}{5}$.
- ¿Cuál es el procedimiento que siguen para escribir un decimal como fracción? Descríbanlo y digan cuál es la fracción que corresponde a 7.5, y cuál para 16.5.
- Si el equipo de Víctor decide resolver la operación escribiendo los dos números como decimales, ¿cómo quedaría expresada la operación y cuál sería el resultado?
- Si el equipo decide resolver la operación escribiendo los números decimales como fracciones, ¿cómo quedarían expresadas las operaciones y cuáles serían los resultados?
- ¿Creen que sí se puede multiplicar un decimal por una fracción? ¿Cuál sería el procedimiento?

Se vale

Comunicación asertiva

Cuando tu maestro les pide trabajar en equipo es necesario que haya una buena comunicación entre los integrantes. ¿Cuáles de las siguientes características crees que debe haber en la comunicación cuando trabajas en equipo?

- Que todos expresen sus puntos de vista u opiniones.
- Que quien no sepa, mejor guarde silencio y escuche y aprenda de los demás.
- Que se escuche con respeto las opiniones de todos.
- Que si no se está de acuerdo con algo, se exprese con libertad.
- Que haya un líder que lleve a cabo la discusión o el trabajo.
- Que cuando me doy cuenta de que alguien está diciendo algo erróneo, se lo manifieste inmediatamente y le diga cómo hacerlo bien.
- Que se puedan expresar con libertad las emociones.

a) ¿Crees que en el trabajo en equipo que hicieron anteriormente, la comunicación fue buena?
b) ¿Cuando trabajas en equipo crees que te comunicas adecuadamente?
c) ¿Qué otras características agregarías para que la comunicación sea buena cuando trabajas en equipo?

Para analizar

Un nuevo reto

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.
En un supermercado, se muestran los productos y precios de la **FIGURA 1.2.**

Cebolla blanca por kilo
$14.90

Jitomate bola por kilo
$15.90

Tomate sin cáscara por kilo
$17.50

FIGURA 1.2 Precios de cebolla, jitomate y tomate.

Si una persona compra $\frac{3}{4}$ de kilogramo de cada producto, ¿cuánto debe pagar por producto?

- Costo de $\frac{3}{4}$ kg de cebolla blanca: ____________ • Costo de $\frac{3}{4}$ kg de jitomate bola: ____________ • Costo de $\frac{3}{4}$ kg de tomate sin cáscara: ____________

2. Reúnanse con otra pareja y comparen sus procedimientos. Justifiquen por qué consideran que sus respuestas son correctas.

a) En plenaria, analicen y respondan.

- ¿Es posible resolver la multiplicación $14.90 \times \frac{3}{4}$ expresando la fracción $\frac{3}{4}$ como un número decimal? ¿Cómo la realizarían?
- ¿Es posible resolver la multiplicación $14.90 \times \frac{3}{4}$ expresando el número decimal 14.90 como una fracción? ¿Cómo la realizarían?
- Para resolver una multiplicación como $14.90 \times \frac{3}{4}$, ¿es necesario convertir la fracción $\frac{3}{4}$ a un número decimal, o bien, convertir el número decimal 14.90 a una fracción equivalente? ¿Por qué?
- ¿Qué procedimiento es el más conveniente para resolver la operación $14.90 \times \frac{3}{4}$? Argumenten sus respuestas.

c) Discutan en grupo con su docente si hay casos en los que conviene operar con fracciones en lugar de decimales, y viceversa.

Formalización

1. En plenaria, realicen una lectura comentada del siguiente texto.

En la primaria aprendiste que una fracción puede representar un cociente, es decir, una división, donde el numerador es el dividendo, y el denominador, el divisor; al realizar esta división obtendrás un número decimal, por lo que si quieres escribir una fracción como un número decimal tienes que dividir el numerador entre el denominador, por ejemplo:

porque: $\frac{3}{5} = 0.6$

$$\begin{array}{r} 0.6 \\ 5\overline{)\,3} \\ 3\,0 \\ 0 \end{array}$$

En algunas divisiones, el cociente tendrá un número finito de cifras y el residuo es cero, como en este caso, por lo que este número corresponde a una fracción decimal.

En otras divisiones el cociente puede tener un número infinito de cifras, por lo que la división nunca acaba, siempre hay un residuo. Debido a esto, no puedes obtener un número exacto y por lo tanto solo obtienes una aproximación. Las fracciones de las que no obtienes un número decimal exacto no son decimales. Recuerda que las fracciones decimales son aquellas que tienen como denominador una potencia de 10 o un número entero que se puede representar con una fracción equivalente cuyo denominador es una potencia de 10. Por ejemplo:

$\frac{7}{10}$ es una fracción decimal porque su denominador es 10

$\frac{6}{25}$ es una fracción decimal porque es igual a $\frac{24}{100}$, puesto que

$$\frac{6 \times 4}{25 \times 4} = \frac{24}{100}$$

En primer grado de secundaria aprendiste a multiplicar fracciones, y aprendiste también que, para multiplicar una fracción por otra fracción, multiplicas numerador por numerador y denominador por denominador, por ejemplo:

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{4 \times 2}{5 \times 6} = \frac{8}{30}$$

Asimismo, aprendiste a multiplicar números decimales y aprendiste que, para multiplicarlos, primero multiplicas como si fueran números naturales. Luego sumas el número de cifras decimales de los factores, y el resultado será igual al número de cifras decimales que debe tener el producto.

Ejemplo: 23.47×8.5

$$\begin{array}{r l} 23.47 & \longrightarrow \text{dos cifras decimales} \\ \times \quad 8.5 & \longrightarrow \text{una cifra decimal} \\ \hline 11735 & \\ 18776 & \\ \hline 199.495 & \longrightarrow \text{tres cifras decimales} \end{array}$$

punto decimal

En el resultado el punto decimal se recorrió tres lugares (de derecha a izquierda) porque se suman los decimales de las dos cantidades a multiplicar: 2 de la primera y 1 de la segunda.

Para multiplicar un número decimal (c) por una fracción ($\frac{a}{b}$), una manera es multiplicar primero el número decimal por el numerador de la fracción y luego dividir este resultado entre el denominador de la fracción; es decir:

$$c \times \frac{a}{b} = \frac{c \times a}{b}$$

2. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema:

El siguiente paralelogramo se redujo a 70% de su tamaño, luego de la reducción se hizo otra reducción al 50% (**FIGURA 1.3**). ¿Cuáles son las dimensiones del paralelogramo en la primera y en la segunda reducción?

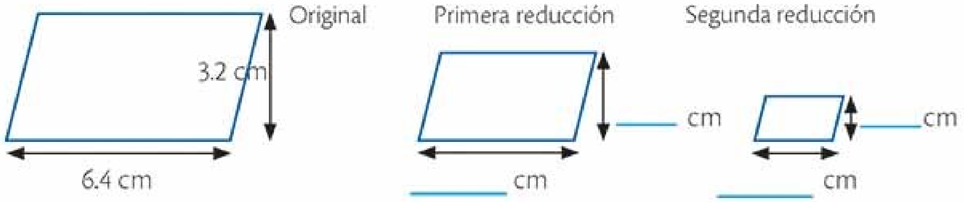


FIGURA 1.3 Reducciones de un paralelogramo.

e

3. Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen los procedimientos que siguieron para determinar las dimensiones de las dos reducciones. Comenten cómo fue que hicieron las operaciones. Luego, entre todos respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Qué fracción es equivalente a 70%? ____________________

b) Para determinar las dimensiones del paralelogramo de la primera reducción, ¿multiplicaron $3.2 \times \frac{7}{10}$? ____________________

c) ¿Qué resulta de multiplicar $3.2 \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{2}$? ____________________

¿Y de multiplicar $6.4 \times \frac{7}{10} \times \frac{1}{2}$? ____________________

¡A practicar!

1. Resuelvan en su cuaderno cada una de las multiplicaciones usando tres métodos distintos en cada caso. Analicen si en todos los casos los productos obtenidos son iguales o equivalentes entre sí.

$$0.8 \times \frac{3}{5} = \qquad\qquad 0.7 \times \frac{2}{3} =$$

a) Analicen si al convertir las fracciones $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{3}$ a números decimales equivalentes éstos son finitos o periódicos; discutan qué implicaciones tiene ello al realizar la multiplicación y en el producto obtenido.

b) Discutan si es indistinto usar cualquiera de los métodos que encontraron, o bien, en qué casos conviene usar un método y no otro si se requiere obtener un resultado exacto.

c) Analicen la siguiente información y comparen lo que se dice en ella con las conclusiones a las que llegaron en el inciso b.

Para terminar

Revisa toda la lección, verifica que tus respuestas sean correctas, luego, escribe en tu cuaderno qué conocimientos y habilidades nuevas adquiriste y cuáles recordaste para realizar multiplicaciones con fracciones y decimales. Anota cualquier duda que tengas para consultarla con tu profesor o profesora.

Portafolio de evidencias

Incluye para tu portafolio de evidencias la solución al Reto donde especifiques claramente las dimensiones de los recipientes 2 y 3.

TIC

Con el programa de computadora de hoja de cálculo es posible realizar multiplicaciones de fracciones por decimales. Veamos una forma de realizarlo.

1. Abre una hoja de cálculo y escribe los siguientes encabezados en las celdas A1, B1, C1 y D1:

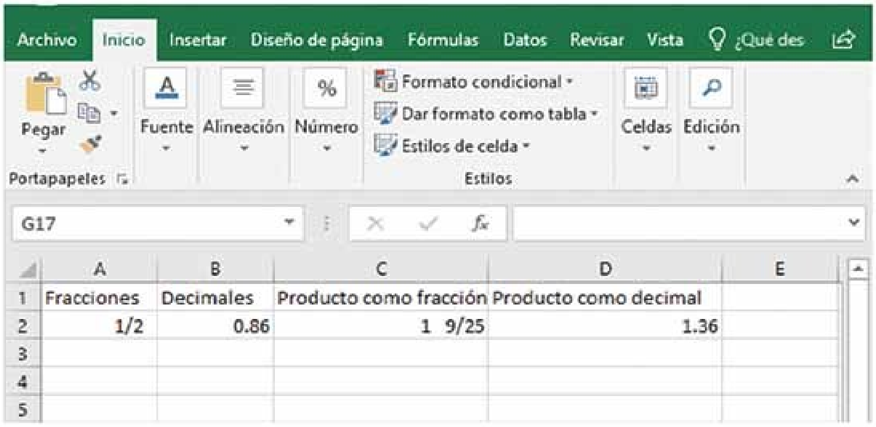


FIGURA 1.4 Organización de celdas para hacer multiplicación de fracciones por decimales en una hoja de cálculo.

2. Escribe 10 fracciones en la columna A, de la celda A2 a la celda A11.

   Para asegurar que se escriban los números como fracciones en las celdas requeridas, selecciona las celdas A2 a la A11. En la sección de número elige el formato de fracción, como se ilustra a continuación.

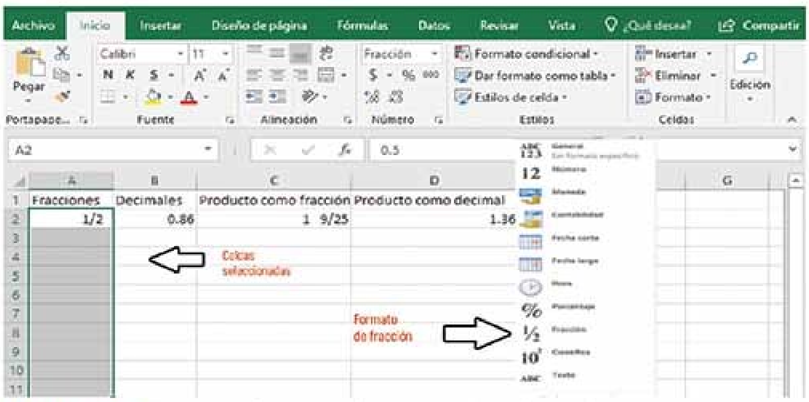


FIGURA 1.15 Elección de formato de fracción para las celdas seleccionadas

3. A continuación escribe 10 números decimales en las celdas B2 a la B11.
4. En la celda C2, escribe la fórmula: =A2*B2 y da Enter.
   - El signo igual indica que vamos a escribir una fórmula.
   - El asterisco corresponde con la operación de multiplicación.
5. Coloca el cursor en el extremo inferior derecho de la celda C2 y arrastra el punto hacia abajo hasta la celda C11.
6. Si deseas ver como decimales los productos escritos posiciónate en la celda D2, escribe =C2 y arrastra el punto como hicimos en el paso 5.

No olvides seleccionar la opción número en la sección de formatos de número.

7. Analiza si los resultados que dio la hoja de cálculo son efectivamente los productos correctos de la multiplicación de los números que escribiste.

¿Operaciones inversas?

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.

Contenido: División con fracciones y decimales positivos

Para arrancar

1. De manera individual, resuelve el siguiente problema.

En la siguiente caja de manzanas, $\frac{2}{5}$ son rojas, $\frac{1}{3}$ son verdes, y el resto son amarillas.

FIGURA 2.1 Caja con manzanas.

a) ¿Qué fracción representan las manzanas amarillas? __________

b) ¿Cuántas manzanas son de cada color?

____

2. Reúnete con otros dos compañeros y hagan lo que se indica.

a) Comenten cómo calcularon la fracción que representa el número de manzanas amarillas.

b) Una vez que todos estén de acuerdo con la respuesta, respondan las siguientes preguntas.

- ¿Qué operación modela la expresión $\frac{2}{5}$ de 60?
- ¿Cuál es el resultado de dicha operación?
- ¿Cuál es el resultado de la operación que modela $\frac{1}{3}$ de 60?
- ¿Cuál es la fracción que resulta de la expresión 16 de 60?

c) Cuando terminen, en plenaria hagan una puesta en común de sus respuestas.

LECCIÓN 2

Reto

1. Reúnete con un compañero, lean la situación y contesten las preguntas.

Un vendedor de agua de sabor prepara todos los días las cantidades que va a vender. La fórmula que utiliza es poner $\frac{2}{3}$ de litro de jarabe por un jarrón con 15 litros de agua. ¿Cuántos jarrones de 15 litros de agua de sabor puede preparar si tiene 10 litros de jarabe?

____

FIGURA 2.2 Jarabe para preparar agua de sabor.

En el equipo de Mauricio están Paulina y Valeria. Ellos discuten de la siguiente manera:

Paulina: Lo que entiendo es que para cada jarrón de agua vierte $\frac{2}{3}$ de litro de jarabe.

Mauricio: Pues podemos dibujar las botellas de jarabe y ver cuántos $\frac{2}{3}$ tenemos en las 10 botellas.

Valeria: Si agarramos $\frac{2}{3}$ en cada botella, de las 10, ¿se pueden preparar 10 jarrones?

Mauricio: Pue sí.

Valeria: Y los tercios que van quedando solos los juntamos para ver cuántos $\frac{2}{3}$ podemos formar.

Paulina: Hay que recordar que $\frac{2}{3}$ es igual a $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$.

Mauricio: Estoy de acuerdo, pero, ¿qué operación tenemos qué hacer para justificar la respuesta?

Paulina: Pues yo creo que multiplicar $10 \times \frac{2}{3}$.

Mauricio: No es una multiplicación, porque si multiplicas $10 \times \frac{2}{3}$, resulta $\frac{20}{3}$, ¿y eso qué significa?

Valeria: ¡Ya sé! Es una división, tenemos que dividir 10 entre $\frac{2}{3}$.

Paulina: ¿Y cómo se hace la operación?

a) Analicen cuál de las dos operaciones relaciona adecuadamente los datos del problema.

$\frac{2}{3} \div 10 =$ $\qquad\qquad$ $10 \div \frac{2}{3} =$

b) ¿Es lo mismo dividir una fracción entre un número natural que dividir un número natural entre una fracción? ¿Por qué?

2. Reúnanse con otra pareja y comparen los procedimientos que emplearon para resolver el problema y respondan las siguientes preguntas.

- ¿Coinciden sus respuestas?
- ¿Los procedimientos que siguieron son iguales?
- ¿Cómo averiguaron cuántas veces cabe $\frac{2}{3}$ en 10 litros?

a) La siguiente recta numérica representa los 10 litros de jarabe, localicen los tercios que hay en 10 litros.

b) ¿Cuántas veces cabe $\frac{2}{3}$ en 10?

c) Para responder la pregunta anterior, ¿se debe hacer la operación $10 \div \frac{2}{3}$?

d) De acuerdo con lo que determinaron, ¿cuál es el resultado de la siguiente operación?

$10 \div \frac{2}{3} =$

Se vale

Bienestar

Actualmente, en el mundo se promueve mucho el cuidado de la salud, y uno de los puntos principales es alimentarse adecuadamente y con higiene. ¿Tú crees que el agua que se vende en las calles es limpia? ¿Sabes con seguridad que el agua es potable? ¿Qué medidas de higiene debe considerar quien vende en la calle aguas endulzadas? ¿En qué te fijarías antes de comprar agua a un vendedor de la calle?

Si es posible, lleven a cabo un debate sobre lo que se debe cuidar antes de comprar alimentos que se venden en la calle.

e) Subrayen el enunciado con el que se puede comprobar que el resultado de la división de un número natural entre una fracción es correcto.
   - Si se multiplica el dividendo por el cociente se obtiene el divisor.
   - Si se multiplica el divisor por el dividendo se obtiene el cociente.
   - Si se multiplica el cociente por el divisor se obtiene el dividendo.
   - Si se multiplica el cociente por el dividendo se obtiene el divisor.

f) Con el procedimiento que subrayaron verifiquen la respuesta del problema.

g) ¿Habrá alguna regla general para dividir un número entero entre una fracción? ¿Cuál podría ser?

Pistas

e

En equipo discutan lo siguiente:
- ¿El problema implica distribuir 10 litros de jarabe en $\frac{2}{3}$?
- ¿Lo que se está preguntando es cuántas veces está $\frac{2}{3}$ en 10 unidades?
- ¿El número de jarrones que resultan será mayor o menor del número de litros de jarabe que se tienen?
- Si se quiere averiguar cuántas veces cabe una cantidad en otra, ¿qué operación se realiza?
- ¿Habrá algún recurso gráfico que se podría usar para modelar el problema?

Para analizar

Un nuevo reto

p

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

Don Miguel cortó, en cinco partes iguales, medio metro de una tira de madera que mide 1 metro de largo como se muestra en la FIGURA 2.3.

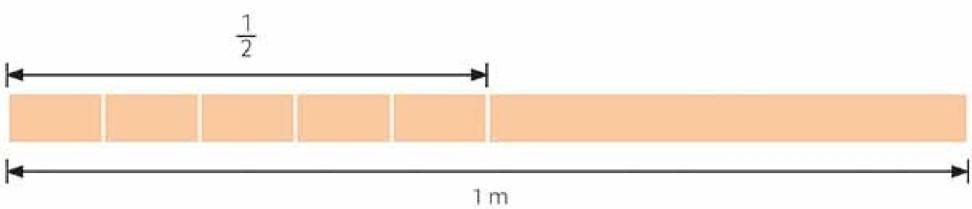


FIGURA 2.3 Tira de madera de 1 m, dividida.

a) ¿Qué fracción de un metro representa cada trozo de madera?

____

b) ¿Qué operación representa o modela lo que hizo Don Miguel? _______________

____

e

2. Reúnanse con otra pareja y comparen sus procedimientos. Justifiquen por qué consideran que sus respuestas son correctas.

a) Repartir en 5 partes iguales $\frac{1}{2}$, significa dividir $\frac{1}{2} \div 5$?

b) ¿Cuál es el resultado de esta operación?

c) Subrayen el enunciado con el que se puede comprobar que el resultado de la división de una fracción entre un número natural es correcto.

- Si se multiplica el dividendo por el cociente, se obtiene el divisor.
- Si se multiplica el divisor por el dividendo, se obtiene el cociente.
- Si se multiplica el cociente por el divisor, se obtiene el dividendo.
- Si se multiplica el cociente por el dividendo, se obtiene el divisor.

d) Con el procedimiento que subrayaron verifiquen la respuesta de la división.

$$\frac{1}{2} \div 5 = \frac{1}{10}$$

e) ¿Qué número multiplicado por 5 resulta 1, es decir, $5 \times$ ______ $= 1$?

f) ¿Cuál es el resultado de cada una de las siguientes operaciones?

$6 \times \frac{1}{6} =$ __________ $4 \times \frac{1}{4} =$ __________ $5 \times \frac{1}{5} =$ __________

g) Cuando en una multiplicación de dos números, se cumple que el producto es igual a 1, es decir, $a \cdot b = 1$, se dice que el número a es el inverso multiplicativo de b.

Por ejemplo, $\frac{1}{3}$ es el inverso multiplicativo de 3, porque $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3 \times 1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

- ¿Qué sucede si en la división $\frac{1}{2} \div 5$ se multiplica el dividendo $\left(\frac{1}{2}\right)$ por el inverso multiplicativo del divisor (5); es decir, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5}$?

h) Analicen si con ambas operaciones obtienen el mismo resultado.

$\frac{1}{2} \div 5 =$ __________ $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} =$ __________

i) ¿En grupo establezcan un procedimiento para dividir una fracción $\frac{a}{b}$ entre un número natural n. Represéntenlo en el siguiente esquema.

$$\frac{a}{b} \div n = \frac{\quad}{\quad} \times \frac{\quad}{\quad} = \frac{\qquad}{\qquad} = \frac{\qquad}{\qquad}$$

3. Reúnete con dos compañeros y resuelvan los siguientes problemas.

a) En un grupo de química, el profesor forma 7 equipos de alumnos. Cada equipo necesita $\frac{3}{4}$ de litro de un solvente para hacer un experimento. Si en el laboratorio cuentan con $5\frac{1}{4}$ litros, ¿alcanza el solvente para los 7 equipos? Justifiquen su respuesta.

b) Para instalar una tubería de gas, un plomero necesita cortar un tubo, como el que se muestra en la **FIGURA 2.4**, en tramos iguales de 0.7 m de longitud. ¿Cuántos tramos puede obtener?

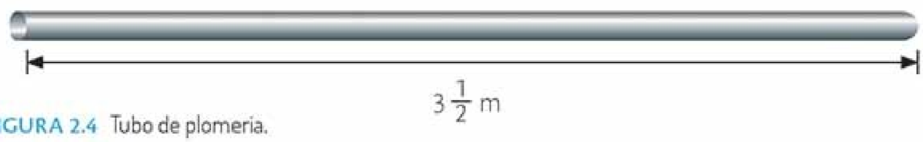


FIGURA 2.4 Tubo de plomería.

4. Comparen sus procedimientos con los de otro equipo. Justifiquen por qué consideran que su respuesta es correcta. Luego, en plenaria, analicen y respondan.

a) ¿Con qué operación se resuelve cada problema?

b) ¿Cuál son las operaciones?

c) ¿Qué cantidad de solvente usan los 7 equipos?

d) En el contexto del primer problema, ¿qué representa la operación $7 \times \frac{3}{4}$?

e) En el contexto del primer problema, ¿qué representa la operación $\frac{21}{4} \div \frac{3}{4}$?

f) ¿Cómo se resuelve una división de una fracción entre otra fracción, y cómo, una fracción entre un número decimal?

g) Para hacer la división:

- ¿Usaron algunos de estos procedimientos: convertir el número decimal a una fracción equivalente o convertir la fracción mixta a un número decimal equivalente?
- ¿Se llega a la misma respuesta con cualquiera de estos procedimientos?

Glosario

Recíproco o inverso multiplicativo. Dos números son recíprocos si al multiplicarse resulta la unidad. Por ejemplo, el recíproco de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$ porque $\left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right) = 1$

Formalización

División de un número natural entre una fracción

La división de un número natural n entre una fracción se puede resolver al multiplicar el número natural por el denominador de la fracción, y luego dividir el resultado entre el numerador, es decir:

$$n \div \frac{a}{b} = (n \times b) \div a = \frac{n \times b}{a} = n \times \frac{b}{a}$$

Observa que la división se transformó en una multiplicación, es decir:

$$n \div \frac{a}{b} = n \times \frac{b}{a}$$

Pero al transformar la división como multiplicación, ¿qué sucede con la fracción? Observa que el denominador pasa a ser numerador y el numerador pasa a ser denominador. Esta transformación se le conoce como el **recíproco** o inverso multiplicativo.

Por ejemplo:

$$10 \div \frac{2}{3} = 10 \times \frac{3}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

Ya sabes que la expresión $\frac{a}{b}$ es otra forma de representar la operación $a \div b$. Por lo tanto, cuando te enfrentes a una división del tipo $n \div \frac{a}{b}$, puedes interpretarla así: $\frac{n}{\frac{a}{b}} = n \times \frac{b}{a}$

La división de un número natural entre una fracción equivale a multiplicar el número natural por el recíproco de la fracción, que se puede expresar de manera general como: $a \div \frac{m}{n} \rightarrow a \times \frac{n}{m}$

A partir de las igualdades dadas anteriormente, representen cada división de un número natural entre una fracción como una multiplicación y resuelvan la multiplicación.

$$7 \div \frac{4}{5} = \square \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square \times \square}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

$$12 \div \frac{3}{5} = \square \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square \times \square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \square$$

$$\frac{12}{\frac{3}{4}} = \boxed{} \times \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \frac{\boxed{ \times }}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

De acuerdo con lo anterior, escriban en su cuaderno una expresión algebraica que represente una regla general para dividir un número natural entre una fracción.

La división de una fracción entre un número natural equivale a multiplicar la fracción por el inverso multiplicativo del número natural, que se puede expresar de manera general como:

$$\frac{a}{b} \div n \rightarrow \frac{a}{b} \times \frac{1}{n}$$

Para realizar una división de una fracción entre un número decimal se pueden hacer dos transformaciones: expresar el divisor como fracción o expresar el dividendo como decimal. Sin embargo, es necesario considerar lo siguiente.

Al dividir una fracción entre otra fracción, el cociente fraccionario será el resultado exacto de dicha división, mientras que, si al convertir la fracción en su equivalente decimal resulta un decimal periódico, por ejemplo $\frac{1}{3} = 0.333...$, entonces se tendrá que truncar o redondear dicho decimal para realizar la división, por lo que al dividir con decimales que fueron redondeados o truncados, el decimal resultante como cociente será una aproximación.

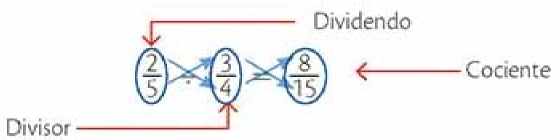
Para dividir una fracción entre otra, por ejemplo $\frac{2}{5}$ entre $\frac{3}{4}$, se puede primero dividir entre 3 y luego multiplicar por 4; o primero multiplicar por 4 y luego dividir entre 3. Dividir una fracción entre un número natural n es lo mismo que multiplicar dicha fracción por $\frac{1}{n}$; por ello, las siguientes expresiones son equivalentes:

$$\left(\frac{2}{5} \div 3\right) \times 4 = \left(\frac{2}{5} \times \frac{1}{3}\right) \times 4 = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \left(\frac{2}{5} \times 4\right) \times \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{5} \times 4\right) \div 3$$

Es decir, $\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3}$, donde $\frac{4}{3}$ es el recíproco o inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$, entonces

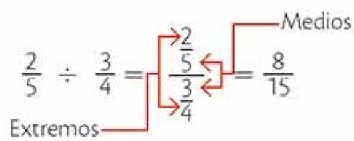
$$\frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}$$

La forma más directa es obteniendo productos cruzados:



Es decir, el cociente de dos fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto del numerador del dividendo por el denominador del divisor, y cuyo denominador es el producto del denominador del dividendo por el numerador del divisor.

Observa que una división de fracciones también se puede expresar de la siguiente manera:



¿Qué operaciones se realizan con los extremos y con los medios para obtener el cociente? ____

¡A practicar!

1. Resuelve los siguientes problemas.

a) ¿Cuál es el factor fraccionario que reduce a la tercera parte las dimensiones de la imagen inicial y cuáles son las medidas de la imagen reducida?

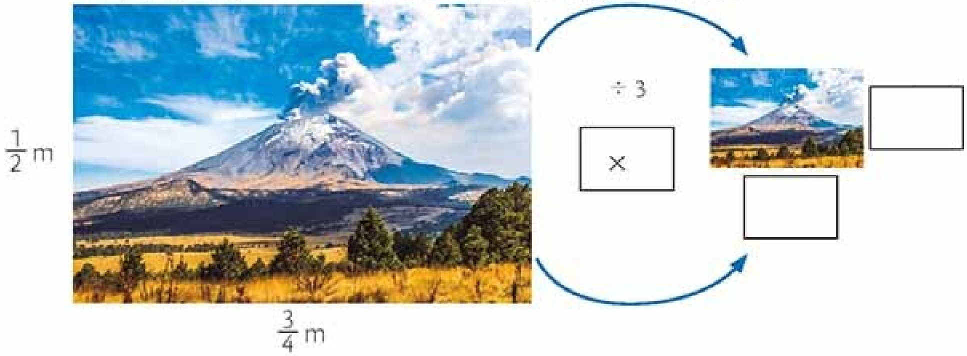


FIGURA 2.5 Reducción de una fotografía a una tercera parte del tamaño original.

2. La batería de un celular se descarga $\frac{2}{8}$ cada hora. Si le queda $\frac{1}{2}$ de batería, ¿cuánto tiempo durará el celular encendido? ____________________

3. Un rectángulo tiene de área $\frac{3}{10}$ m^2 y uno de sus lados mide $\frac{2}{5}$ m. ¿Cuánto mide el otro lado? ____________________

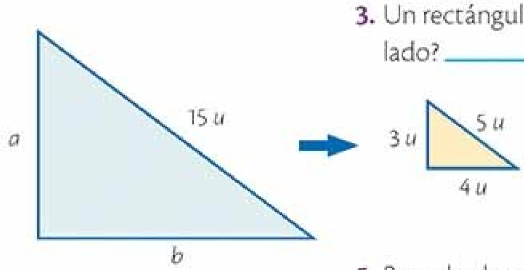


FIGURA 2.6 Triángulo a escala de 3 a 1.

4. Al triángulo FIGURA 2.6 se le aplicó una reducción con un factor de escala $\frac{1}{3}$.
¿Cuáles son las medidas de a y b? ____________________

5. Resuelve las operaciones.

a) $80 \div \frac{4}{3} =$ **b)** $\frac{1}{3} \div 0.2 =$ **c)** $\frac{3}{4} \div 3 =$

d) $\frac{5}{8} \div \frac{3}{7} =$ **e)** $\frac{4}{5} \div \frac{5}{4} =$ **f)** $\frac{3}{5} \div \frac{3}{5} =$

g) $\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{9}{4}} =$ **h)** $\dfrac{0.25}{\frac{2}{11}} =$ **i)** $\dfrac{\frac{1}{8}}{2} =$

6. Elige una de las operaciones anteriores e inventa un problema que se pueda resolver con dicha operación. ____________________

Relaciónalo

Recuerda las dos maneras de resolver un cociente de fracciones que se revisaron en la página 23.

Portafolio de evidencias

Incluye para tu portafolio de evidencias la solución al Reto donde especifiques claramente si alcanza el solvente para los 7 equipos, y en el caso del segundo problema, el número de tramos de tubos que se pueden obtener.

Para terminar

1. Revisa toda la lección, verifica con algunos compañeros que tus respuestas sean correctas, en caso de que los resultados no coincidan, expongan sus dudas ante el grupo.

2. Escribe en tu cuaderno qué conocimientos y habilidades nuevas adquiriste y cuáles recordaste para realizar divisiones con fracciones y decimales. Escribe cualquier duda que tengas para consultarla con tu profesor.

¡Jugando con todos!

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones, y decimales positivos y negativos.

Contenido: Multiplicación y división con números enteros, fracciones y decimales positivos y negativos

Para arrancar

1. Analiza la siguiente información y haz lo que se indica.

El agua virtual

El concepto se refiere a la cantidad de agua necesaria para la producción de alimentos y para la elaboración de los productos que requieren un proceso industrial.

Cada producto fabricado requiere agua. Algunas industrias utilizan más agua que otras, por ejemplo, en la siguiente gráfica se muestra la cantidad de agua que se gasta (representado el gasto con signo negativo) para la producción de ocho alimentos.

Fuente: http://www.conagua.gob.mx/CONAGUA07/Contenido/Documentos/carrera_agua_2015.pdf

FIGURA 3.1 Agua virtual de algunos alimentos.

a) Tomando en cuenta que en la gráfica se representa con signo negativo la cantidad de agua que se gasta para la fabricación de los productos que se indican, determina la cantidad de agua se gastaría para la producción de cada una de las siguientes cantidades de alimento. Primero expresa cada suma como una multiplicación; luego, escribe el resultado.

Alimento	Cantidad de agua (litros) que se gastaría para su producción
5 kg de huevo	$(-1\,620) + (-1\,620) + (-1\,620) + (-1\,620) + (-1\,620) =$
5 litros de leche	$(-1\,000) + (-1\,000) + (-1\,000) + (-1\,000) + (-1\,000) =$
5 kg de pollo	$(-3\,900) + (-3\,900) + (-3\,900) + (-3\,900) + (-3\,900) =$
5 piezas de pan de 30 g	$(-40) + (-40) + (-40) + (-40) + (-40) =$
5 kg de jitomate	$(-185) + (-185) + (-185) + (-185) + (-185) =$
5 kg de bistec	$(-37\,766) + (-37\,766) + (-37\,766) + (-37\,766) + (-37\,766) =$
5 litros de jugo de naranja	$(-850) + (-850) + (-850) + (-850) + (-850) =$
5 kg de arroz	$(-3\,333) + (-3\,333) + (-3\,333) + (-3\,333) + (-3\,333) =$

TABLA 3.1 Cantidad de agua que se consume al producir alimentos.

LECCIÓN 3

2. Reúnete con otros dos compañeros y comenten cómo fue que calcularon la cantidad de agua que se gastaría para la producción de cada uno de los alimentos.

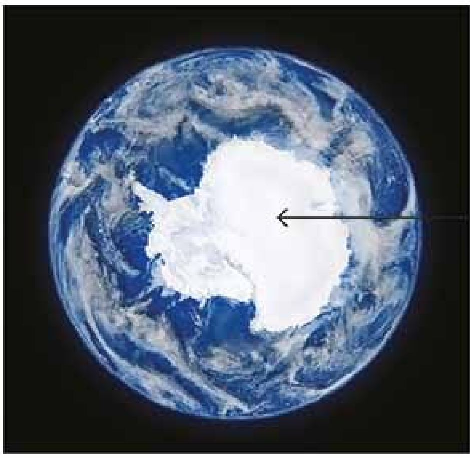
Una vez que todos estén de acuerdo con la respuesta, respondan las siguientes preguntas.

- ¿Se puede resolver cada suma con una multiplicación?
- ¿Cuál es la multiplicación que representa la suma $(-40) + (-40) + (-40) + (-40) + (-40)$?
- ¿Cuál es el resultado de multiplicar un número positivo por un número negativo? Por ejemplo: $8 \times (-50) =$

Reto

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

En la Antártida está el lugar más frío de la Tierra. La estación de Vostok es el lugar donde se registran las temperaturas. El día que se registró la temperatura más baja, disminuía 4 grados por hora de manera constante. Al mediodía, el descenso de la temperatura se registraba a −46 °C. ¿Qué temperatura había en ese día después de 8 horas del mediodía? Escriban la expresión aritmética que resuelve el problema.



La Antártida, el punto más frío del planeta. La temperatura más baja registrada hasta ahora es de −94 °C

FIGURA 3.2 La Antártida vista desde el espacio.

Fuente: https://www.vix.com/es/btg/curiosidades/5613/20-fotos-y-datos-interesantes-sobre-la-antartida-que-tienes-que-conocer

En el equipo de Manuel están Karla y Josefina. Ellos discuten de la siguiente manera:

Josefina: Lo que entiendo es que cada hora que transcurría bajaba la temperatura 4 °C.
Manuel: ¿El mediodía significa a las 12 del día?
Karla: Sí, el día empieza a las 12 de la noche, o sea a las 12 de la madrugada.
Manuel: Entonces podemos partir de las 12 del día e ir bajando 4 °C cada hora.
Karla: Pero date cuenta de que nos preguntan 8 horas después del mediodía.
Josefina: A partir de las 12 de la madrugada, ¿cuántas horas han pasado 8 horas después del mediodía?
Manuel: Pues 12 más 8, 20 horas.
Josefina: Entonces es a esa hora que se necesita saber qué temperatura se registraba.

Manuel: Se me ocurre una idea, podemos dibujar las 24 horas e ir sumando o restando las temperaturas.
Karla: ¡Ya sé! Podemos resolverlo con una multiplicación.
Josefina: ¿Y cuál es la operación?
Manuel: A mí se me ocurre otra opción, ¡con sucesiones!
Karla: ¿Qué? ¡A ver, muéstranoslo!

2. Reúnanse con otros compañeros y comparen su respuesta. Explíquenles cómo fue que ustedes llegaron a esa respuesta y permitan que ellos les cuestionen o que argumenten su respuesta. Una vez que todos estén de acuerdo con la respuesta correcta, respondan las siguientes preguntas:

e

a) ¿Qué temperatura había en esa región a las 14 horas? Escriban la expresión aritmética que resuelve el problema.
____

b) ¿Cuál es el resultado de la siguiente operación? $-46 + 8(-4) =$ _______

c) ¿Es correcta la operación $(-46) + (-32) = -78$?
¿Por qué? _______________

d) Si el producto de dos números naturales es una suma repetida, en la que un factor se suma tantas veces como indica el otro, ¿cuál es el resultado de las siguientes multiplicaciones?

i) $3(-4) =$
ii) $5(-7) =$
iii) $4(-4) =$
iv) $7(-3) =$

e) Una de las propiedades de la multiplicación es que el orden de sus factores no altera el producto; por lo que si se aplica la propiedad conmutativa del producto que dice que dados dos enteros a y b se cumple que: $a \times b = b \times a$. Entonces::

$$2(-3) =$$
$$-4(5) =$$

f) De acuerdo con lo anterior, ¿qué signo tiene el resultado de multiplicar un número positivo por un número negativo? _______________

g) Escriban en su cuaderno una regla para multiplicar un entero positivo por un entero negativo, o un entero negativo por un entero positivo.

Se vale

Bienestar

El agua es salud

¿Tu crees que las manos limpias salvan vidas?

El agua es esencial para la salud humana. El cuerpo humano puede durar semanas sin alimentos, pero sólo unos días sin agua. El agua es esencial para nuestra supervivencia. El lavado de manos de forma regular ayuda a eliminar gérmenes, evitar enfermedades y prevenir la propagación de microorganismos nocivos a otras personas. Hasta un billón de gérmenes pueden vivir en un gramo de excremento.

Cada día, cada persona requiere acceso al agua para beber, cocinar así como para higiene personal.

La Organización Mundial de la Salud (OMS) recomienda una cantidad aproximada a 20 litros al día por habitante para cubrir las necesidades básicas de higiene y alimentos.

En México, ¿cuál es el consumo promedio de agua por persona?

¿Sabes qué significa cada una de las siguientes afirmaciones? "El agua es urbanización", "El agua es naturaleza", "El agua es salud", "El agua es industria".

Realicen una investigación sobre el cuidado y valoración del agua y expongan cuáles son las razones de su cuidado.

Pistas

1. En equipo discutan lo siguiente:

e

- ¿Qué hora es cuando han trascurrido 20 horas? _______________
- ¿Qué temperatura se registra a las 12 del día? _______________
- Si cada hora bajan 4 °C de temperatura, ¿cuántos grados bajan al cabo de 8 horas? _______________
- ¿Cuál es el resultado de la operación $(8)(-4)$? _______________

Para analizar

Un nuevo reto

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

Una sucesión con progresión aritmética es una secuencia de números, donde cada término se obtiene sumando (o restando) una cantidad constante al anterior término de la sucesión. Por ejemplo: 5, 3, 1, −1, −3, −5, −7, −9, −11, −13,

a) De acuerdo con lo anterior, escribe la sucesión con progresión aritmética que se genera con el producto de las multiplicaciones indicados en cada uno de los tres casos siguientes.

Caso 1

Multiplicaciones	4×3	4×2	4×1	4×0	$4 \times (-1)$	$4 \times (-2)$	$4 \times (-3)$	$4 \times (-4)$	$4 \times (-5)$
Sucesión	12	8							

TABLA 3.2 Sucesión con progresión aritmética y factor positivo.

Caso 2

Multiplicaciones	-4×5	-4×4	-4×3	-4×2	-4×1	-4×0	$-4 \times (-1)$	$-4 \times (-2)$	$-4 \times (-3)$
Sucesión	−20	−16							

TABLA 3.3 Sucesión con progresión aritmética y factor negativo.

Caso 3

Multiplicaciones	$-3(-4)$	$-3(-3)$	$-3(-2)$	$-3(-1)$	$-3(0)$	$-3(1)$	$-3(2)$	$-3(3)$	$-3(4)$
Sucesión	12								

TABLA 3.4 Sucesión con progresión aritmética.

b) Escriban las regularidades que observan sobre los productos:

- Cuando se multiplica un número positivo por uno negativo: ____________
- Cuando se multiplica un número negativo por uno positivo: ____________
- Cuando se multiplican dos números negativos: ____________

2. Reúnanse con otro equipo y comparen sus sucesiones; si no coinciden, revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo. Luego, entre todos respondan lo siguiente.

a) ¿Cuál es el resultado de la operación $4 \times (-1)$?

b) ¿Cuál es el resultado de la operación $-3(-1)$?

c) De acuerdo con las regularidades que encontraron en cada sucesión, completen los siguientes enunciados que corresponden a las reglas generales para multiplicar dos números, negativo por positivo y negativo por negativo.

- El producto de dos números positivos es un número ____________
- El producto de dos números negativos es un número ____________
- El producto de dos números, uno positivo y otro negativo, es un número ____________

3. Realiza las siguientes operaciones aplicando la regla de los signos:

a) $24(-3) =$ **c)** $-32(4) =$ **e)** $(10)(-4) =$

b) $-24(-3) =$ **d)** $-30(-4) =$ **f)** $(-10)(4) =$

4. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema:

p

Dividir un número en otro significa encontrar un número (cociente) que multiplicado por el denominador sea igual al numerador, es decir: $\frac{a}{b} = c \rightarrow c \cdot b = a$. Por ejemplo:

$\frac{12}{4} = 3 \rightarrow 3 \cdot 4 = 12$

a) Coloquen el resultado de cada una de las divisiones que aparecen en las TABLAS 3.5, 3.6 y 3.7 y que generan una sucesión con progresión aritmética.

Caso 1

Divisiones	$\frac{16}{-2}$	$\frac{12}{-2}$	$\frac{8}{-2}$	$\frac{4}{-2}$	$\frac{0}{-2}$	$\frac{-4}{-2}$	$\frac{-8}{-2}$	$\frac{-12}{-2}$	$\frac{-16}{-2}$
Sucesión	-8								

TABLA 3.5 Sucesión con progresión aritmética C1.

Caso 2

Divisiones	$\frac{-24}{2}$	$\frac{-18}{2}$	$\frac{-12}{2}$	$\frac{-6}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{12}{2}$	$\frac{18}{2}$	$\frac{24}{2}$
Sucesión	-12								

TABLA 3.6 Sucesión con progresión aritmética C2.

Caso 3

Divisiones	$\frac{-84}{-3}$	$\frac{-63}{-3}$	$\frac{-42}{-3}$	$\frac{-21}{-3}$	$\frac{0}{-3}$	$\frac{21}{-3}$	$\frac{42}{-3}$	$\frac{63}{-3}$	$\frac{64}{-3}$
Sucesión	28								

TABLA 3.7 Sucesión con progresión aritmética C3.

b) Escriban las regularidades que observan sobre los cocientes:

- Cuando se divide un número positivo por uno negativo: ____________
- Cuando se divide un número negativo por uno positivo: ____________
- Cuando se dividen dos números negativos: ____________

c) De acuerdo con las regularidades que encontraron en cada sucesión, completen los siguientes enunciados que corresponden a las reglas generales para dividir dos números positivos, dos números negativos y un número positivo entre un número negativo o viceversa.

- El cociente de dos números positivos es un número ____________
- El cociente de dos números negativos es un número ____________
- El cociente de dos números, uno positivo y otro negativo, es un número ____________

5. Reúnanse con otra pareja y comparen sus sucesiones; si no coinciden, revisen y argumenten hasta llegar a un acuerdo sobre las respuestas correctas. Luego, entre todos hagan lo que se indica.

e

a) Determinen el resultado de cada una de las siguientes operaciones.

- $\frac{-12}{2} =$
- $\frac{21}{-3} =$
- $\frac{-21}{-3} =$

b) De acuerdo con las regularidades que encontraron en cada sucesión, completen los siguientes enunciados para obtener las reglas que sirven para dividir dos números con signo:

- Al dividir dos números del mismo signo, el resultado es un número ____________
- Al dividir dos números de distinto signo, el resultado es un número ____________

Formalización

Independientemente de su signo, un número implica cierto valor. Si no consideramos el signo del número, entonces estamos tratando con su valor absoluto y su notación simbólica es $|\ |$, por ejemplo: $|-7| = 7$, $|9| = 9$.

Para multiplicar dos enteros, se multiplican sus valores absolutos, y el signo del resultado está dado por las siguientes reglas:

Para multiplicar dos números enteros, se multiplican sus valores absolutos y el signo del resultado está dado por las siguientes reglas:

Cuando se multiplican dos números enteros positivos, el resultado es un número positivo.

$$(+a)(+b) = +c$$

Cuando se multiplican dos números enteros negativos, el resultado es un número positivo.

$$(-a)(-b) = +c$$

Cuando se multiplican dos números enteros de signos contrarios, el resultado es negativo.

$$(+a)(-b) = -c$$
$$(-a)(+b) = -c$$

Para dividir dos números enteros, se dividen sus valores absolutos y el signo del resultado está dado por las siguientes reglas:

Cuando se dividen dos números enteros positivos, el resultado es un número positivo.

$$\frac{+a}{+b} = +c$$

Cuando se dividen dos números enteros negativos, el resultado es un número positivo.

$$\frac{-a}{-b} = +c$$

Cuando se dividen dos números enteros de signos contrarios, el resultado es negativo.

$$\frac{+a}{-b} = -c \qquad \frac{-a}{+b} = -c$$

Lo anterior aplica para fracciones y decimales.

p 6. Reúnete con un compañero y analicen la siguiente información, luego realicen lo que se pide.

a) Completen la siguiente tabla utilizando las reglas para multiplicar números con signo. Escriban en cada celda marcada con un signo, un número entero. Luego hagan las operaciones para llenar el resto de la tabla con el resultado de multiplicar el número que encabeza la columna con el número que encabeza la fila.

×	+4	−7
+6		
−9		

TABLA 3.8 Tabla de multiplicación de números enteros.

b) Completen la siguiente tabla utilizando las reglas para dividir números con signo. Escriban en cada celda marcada con un signo, un número entero. Luego hagan las operaciones para llenar el resto de la tabla con el resultado de dividir el número que encabeza la columna entre el número que encabeza la fila.

÷	+36	−45
+3		
−9		

TABLA 3.9 Tabla de división de números enteros.

c) Completa cada enunciado.

- Cuando se multiplican o dividen un número positivo y un número negativo, el resultado es ______
- Cuando se multiplican o dividen dos números positivos, el resultado es ______
- Cuando se multiplican varios números negativos, el resultado es un número positivo si el número de factores es par; sin embargo, el resultado es un número negativo si el número de factores es ______

d) Reúnanse con otra pareja y comparen sus respuestas. Si no coinciden, revisen y argumenten, con base en lo visto de la lección, hasta llegar a un acuerdo.

p 7. Reúnete con un compañero y resuelvan los siguientes problemas. Justifiquen sus respuestas.

a) Pensé un número, al multiplicarlo por −5 y enseguida restar 132 obtengo cero. ¿De qué número se trata? ______

b) ¿Qué números sumados dan −1 y multiplicados resulta −72? ______

c) Pensé un número, lo dividí entre $\frac{3}{4}$ y resultó −12. ¿Cuál fue el número que pensé?

______

d) Encuentren el número que falta. Usen la calculadora para verificar sus respuestas.

a. $4 - a = 10$

$a =$ ______

b. $\left(\frac{1}{2}\right) - b = \frac{3}{4}$

$b =$ ______

c. $\left(-\frac{1}{3}\right) - c = \frac{1}{2}$

$c =$ ______

d. $(-18) - d = 20$

$d =$ ______

e. $(-40) - e = 50$

$e =$ ______

f. $16 - f = 40$

$f =$ ______

g. $(-17.5) - g = (-19.4)$

$g =$ ______

h. $38.7 - h = 62.4$

$h =$ ______

i. $(-17.9) - k = 100$

$k =$ ______

e) Reúnanse con otra pareja y verifiquen si son las mismas respuestas a las que llegaron. En caso de que haya diferencias, comenten cómo fue que llegaron a cada respuesta y verifiquen si están aplicando correctamente las reglas de los signos. Si existen dudas, coméntenlas con su profesor o profesora.

¡A practicar!

Resuelve los siguientes problemas.

1. Escribe los 10 primeros términos de la sucesión cuya regla general es: $-4n + 7$.

2. Cuál de las siguientes reglas generales genera la sucesión: 10, 8, 6, 4, 2, ...

a) $3n + 7$ **b)** $4n + 6$ **c)** $-2n - 12$ **d)** $-2n + 12$

3. Encuentra el resultado de las operaciones que se indican:

a) $11(-6) =$ ____ **b)** $4(-15) =$ ____ **c)** $-27(3) =$ ____

d) $-18(-4) =$ ____ **e)** $-20(-12) =$ ____ **f)** $(-25)8 =$ ____

g) $\frac{49}{-7} =$ ____ **h)** $\frac{-100}{10} =$ ____ **i)** $\frac{200}{-8} =$ ____

j) $\frac{-324}{-36} =$ ____ **k)** $\frac{-325}{13} =$ ____ **l)** $\frac{-369}{-41} =$ ____

m) $(-6.5)(+5) =$ ____ **n)** $\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) =$ ____ **o)** $(-5)(+4)(-3) =$ ____

p) $\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{7}{6}\right)(-3) =$ ____ **q)** $(-4)(-3)\left(-\frac{3}{4}\right)(-0.2)(-1) =$ ____

4. Adriana encontró un número que multiplicado por 1.2 da −9.6. ¿Qué número es?

5. ¿Qué número dividido entre −7 da como resultado −1.4? ____

6. ¿Qué número multiplicado por −2/3 da −1/2? ____

7. Encuentra dos divisiones cuyo cociente sea −21. ____

8. Vanesa presentó un examen de Filosofía en el que otorgaban 2.5 puntos por cada respuesta completa y −0.5 por cada respuesta incompleta. Si Vanesa obtuvo 22.5 y contestó 10 preguntas de manera completa, ¿en cuántas preguntas no dio la respuesta completa? ____

Portafolio de evidencias

Incluye para tu portafolio de evidencias la solución a dos o más problemas donde apliques una serie de conocimientos adquiridos tanto en la lección anterior como en ésta.

Para terminar

1. Revisa toda la lección, verifica que tus respuestas sean correctas, luego, escribe en tu cuaderno qué conocimientos y habilidades nuevas adquiriste y cuáles recordaste para realizar divisiones con fracciones y decimales. Anota cualquier duda que tengas para consultarla con tu profesor o profesora.

TIC

1. En una hoja de cálculo electrónica se puede explorar el resultado de multiplicar y dividir números decimales con signo. Haz lo siguiente.

a) En las celdas A1, B1, C1 y D1, escribe los títulos que aparecen en la siguiente tabla

b) En la celda A2 y B2 escribe los números decimales 0.5 y −0.8.

	A	B	C	D
1	número decimal 1	número decimal 2	multiplicación	división
2	0.5	-0.8		
3				
4				

FIGURA 3.3 Tabla en hoja de cálculo.

c) En la celda C2 escribe la fórmula: = A2 * B2

d) En la celda D2 escribe la fórmula : = A2/B2

	A	B	C	D
1	número decimal 1	número decimal 2	multiplicación	división
2	0.5	-0.8	=A2*B2	
3				
4				

FIGURA 3.4 Fórmulas para multiplicación y división en hoja de cálculo.

Deberás obtener los siguientes resultados:

	A	B	C	D
1	número decimal 1	número decimal 2	multiplicación	división
2	0.5	-0.8	-0.4	-0.625
3				

FIGURA 3.5 Resultados de multiplicación y división en hoja de cálculo.

e) A continuación, ingresa los siguientes pares de números en A2 y B2 y observa si los resultados de multiplicar números decimales con signo cumplen las leyes de los signos que has aplicado para los números enteros.

	A	B	C	D
1	número decimal 1	número decimal 2	multiplicación	división
2	0.5	-0.8	-0.4	-0.625
3	-0.3	-1.2		
4	-5.33	-2.1		
5	7.8	0.5		
6	-6.2	0.31		
7	0.003	-0.02		

FIGURA 3.6 Ejercicio de multiplicaciones y divisiones en hoja de cálculo.

f) Para copiar las fórmulas de C2 y D2 a las celdas de abajo haz lo siguiente:

- Posiciona tu cursor en la celda C2.
- Colócalo en el extremo inferior derecho.
- Mantén presionado el botón derecho del ratón.
- Mueve el cursor hacia abajo hasta la fila 7.
- Haz lo mismo en las celdas D2.

Si requieres ayuda, pregunta a tu docente.

g) Ahora vamos a multiplicar y dividir fracciones.

- En tu hoja de cálculo posiciónate en la celda A8.
- Busca el menú que dice Número, y selecciona la categoría de Fracción y el tipo de Hasta dos dígitos (21/25).
- Aprieta el botón Aceptar.

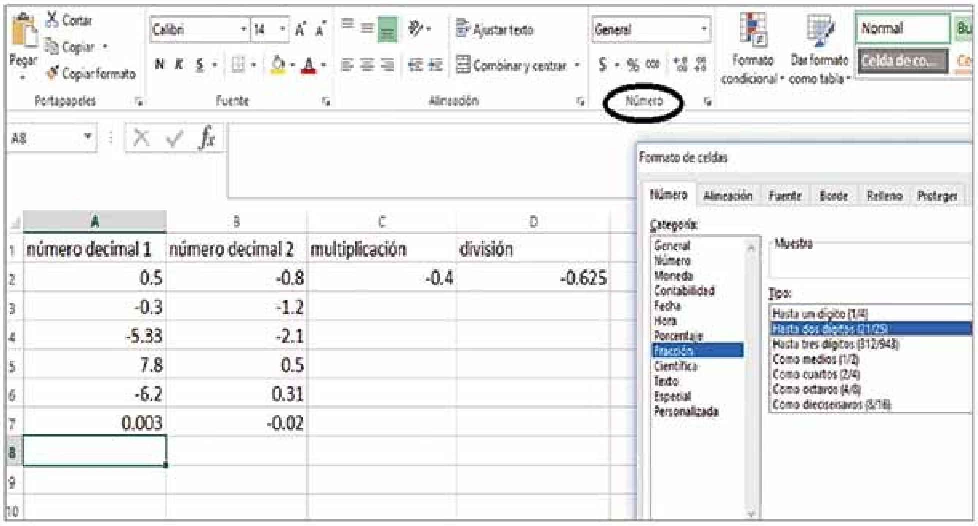


FIGURA 3.7 Cambio de formato de celdas.

h) Haz lo mismo en las celdas B8, C8 y D8, para que puedas escribir fracciones.

i) Ahora escribe los decimales siguientes:

	A	B	C	D
1	número decimal 1	número decimal 2	multiplicación	división
2	0.5	-0.8	-0.4	-0.625
3	-0.3	-1.2		
4	-5.33	-2.1		
5	7.8	0.5		
6	-6.2	0.31		
7	0.003	-0.02		
8	1/5	- 2/7		
9	- 1/8	- 3/4		
10	- 7/9	1/3		
11	1/10	2/15		
12	- 2/3	- 5/8		

FIGURA 3.8 Fracciones para hacer multiplicaciones y divisiones en hoja de cálculo.

j) Copia nuevamente las fórmulas como lo hiciste anteriormente hasta la celda C12 y D12, respectivamente. Observa si los resultados de multiplicar fracciones con signo cumplen las leyes de los signos que has aplicado para los números enteros.

Para leer

Nicolás Chuquet

Matemático francés, nació en París alrededor del año 1450 y murió en Lyon en 1488. Su obra maestra fue *La tripartición de la ciencia de los números*, que consta de tres partes. En la primera, el matemático parisino explica las operaciones con números enteros y con fracciones, y ofrece de un modo explícito la regla de los signos de la multiplicación.

Para que los estudiantes no se olvidaran de la regla de los signos, Chuquet da el siguiente ejemplo:

> *"El literato L es candidato a la Academia Francesa. Entre los 37 miembros, ha anotado 20 partidarios y 17 adversarios (se admite que unos y otros no cambiarán de parecer).*
>
> *Antes de la elección de L, pueden producirse las dos eventualidades:*
>
> *Ya sea una elección (ganancia de un votante);*
>
> *Ya sea una defunción (pérdida de un votante).*
>
> *Entonces hay cuatro posibilidades:*
>
> *Ganancia de un partidario o la mayoría de L aumenta;*
>
> *Ganancia de un adversario o la mayoría de L disminuye;*
>
> *Pérdida de un partidario o la mayoría de L disminuye;*
>
> *Pérdida de un adversario o la mayoría de L aumenta..."*

Este ejemplo, que para nosotros puede ser bastante confuso, se hizo muy famoso en Francia en el siglo XV. Te invitamos a que lo interpretes y encuentres en él la famosa regla de los signos de multiplicación:

Texto modificado de: http://www.mcnbiografias.com y http://redescolar.ilce.edu.mx

Contagios peligrosos

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raices cuadradas.

Contenido: Potencias y raíz cuadrada

Para arrancar

1. De manera individual, resuelve el siguiente problema.

Muchas veces nos hemos enfermado, a pesar de llevar una vida sana y sentirnos fuertes. En esos momentos nos preguntamos, ¿cómo me contagié? Existen distintas vías de transmisión de las enfermedades, que es importante conocer para poder evitar desde las patologías más comunes, hasta las más severas.

El siguiente esquema representa el número de contagios, de acuerdo a los días transcurridos, de una cierta enfermedad.

Contagio de personas de una enfermendad

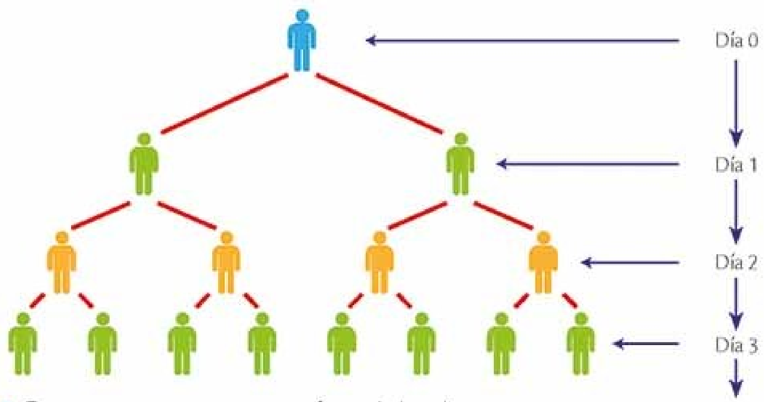


FIGURA 4.1 Forma en que se propaga una enfermedad en dias.

a) Cada persona contagiada, ¿a cuántas personas contagia? ____________

b) Si continúa la misma regularidad de contagio, ¿cuántas personas se contagian en el décimo día? ____________

2. Reúnete con dos compañeros y comparen su respuesta. En caso de que no coincida, expliquen cómo calcularon el número de contagiados por cada día que transcurría. Luego, hagan lo siguiente.

a) Escriban en la tabla el número de contagios por día, al cabo de 10 días transcurridos.

Días transcurridos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número de contagiados	1										

TABLA 4.1 Número de personas contagiadas por dias transcurridos.

b) Si el número de contagiados es una sucesión, expliquen cuál es la regularidad que presenta dicha sucesión numérica. ____________

LECCIÓN 4

c) ¿Qué número multiplicado por un término anterior se obtiene el término siguiente de la sucesión?

Una forma abreviada de expresar una multiplicación de factores iguales es por medio de una operación que se llama potencia, por ejemplo: $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$, donde:

$$3^5 = 243$$

Se lee "tres elevado a la quinta potencia"; por lo que 243 es la quinta potencia de 3.

El exponente indica el número de veces que aparece la base como factor.

La potencia cero de cualquier número (excepto el cero) es igual a 1.

$$a^0 = 1, \text{"donde"}\ a \neq 0$$

La primera potencia de cualquier número es igual al mismo número.

$$a^1 = a$$

d) De acuerdo con lo anterior, expresen cada número de contagiados como producto de factores iguales y completen la TABLA 4.2.

Número de contagiados	Producto de factores iguales	Como potencia de 2
1	1	2^0
2	2	2^1
4	2×2	2^2
8	$2 \times 2 \times 2$	2^3
16		
32		
64		
128		
256		
512		
1 024		

TABLA 4.2 Número de infectados expresado como potencias de 2.

e) De acuerdo con la TABLA 4.2, ¿una multiplicación de factores iguales se puede expresar en forma abreviada?

f) ¿Cuál es la forma abreviada de las siguientes multiplicaciones de factores iguales?

- $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 =$ ______
- $7 \times 7 \times 7 \times 7 =$ ______
- $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 =$ ______

Reto

p **1.** Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

Un virus es un microorganismo compuesto de material genético protegido por un envoltorio proteico, que causa diversas enfermedades introduciéndose como parásito en una célula para reproducirse en ella. En una investigación, se encontró que un virus se reproduce como se muestra en la FIGURA 4.2.

Reproducción de un virus en el cuerpo humano

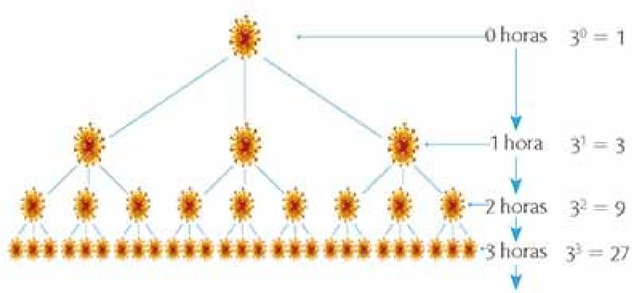


FIGURA 4.2 Forma de reproducción de un virus en el cuerpo humano en horas transcurridas.

a) Si este virus se aloja en un cuerpo humano, ¿cuántos virus habrá al cabo de 6 horas? ______

e **2.** Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen su respuesta. En caso de que no coincidan muestren qué operaciones hicieron para encontrar la cantidad de virus al cabo de 6 horas. Una vez que estén de acuerdo en cuál es la respuesta correcta, entre todos respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo obtuvieron la respuesta?

b) ¿Todos utilizaron la misma operación para realizar el cálculo?

c) Escriban en la **TABLA 4.3** el número de virus por hora trascurrida.

Horas transcurridas	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de virus reproducidos									
Potencia de 3	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8

TABLA 4.3 Número de virus reproducidos expresado en potencias de tres.

d) De acuerdo con la **TABLA 4.3**, ¿cuál es el resultado de 3^5? Justifiquen su respuesta.

e) Con la coordinación de su profesor o profesora, en sesión grupal, dos equipos voluntarios expliquen cómo es que llegaron a un acuerdo entre los integrantes sobre la resolución del problema. Luego, expliquen las respuestas de las preguntas anteriores. Si otro equipo tiene un método distinto puede pasar a explicarlo.

Se vale

Comunicación asertiva

Cuando tu maestro les pide discutir en equipo sobre la respuesta y el procedimiento de resolución de un problema, les permite apropiarse de las consignas de la situación, confrontar las repuestas elaboradas individualmente, comprender las divergencias eventuales para ponerse de acuerdo en una respuesta única, comunicar su método de solución y defenderlo, comprender el proceso de otro, apreciar los procedimientos diferentes, identificar un procedimiento, un camino de resolución, etcétera.

¿Cuáles de las siguientes recomendaciones crees que se debe tomar en cuenta cuando discutes en equipo?

- Tomar el uso de la palabra respetando los turnos de participación y tiempos de espera en un ambiente de colaboración.
- Otorgar valor a la palabra de un compañero y no sólo a la del maestro.
- Registrar el trabajo para poder comunicarlo.
- Revisar los errores y corregirlos.

Pistas

p **1.** Con tu misma pareja del Reto, de acuerdo con la información dada en la **FIGURA 4.2**, respondan las siguientes preguntas.

- ¿Cuántos virus se reproducen al cabo de una hora? ______________
  ¿Y al cabo de 3 horas? ______________
- En la investigación se determinó que el número de virus reproducidos transcurridas 4 horas es 3^4, ¿Cuántos virus se reproducen en 4 horas?
  ____
- ¿Cuáles son los primeros cuatro términos de la sucesión que se genera con el número de virus que se reproduce por hora?
- ¿Qué número se multiplica a un término de la sucesión para obtener el siguiente?

Para analizar

Un nuevo reto

p **1.** Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

En la sucesión de triángulos mostrados en la **FIGURA 4.3**, la primera imagen es de un triángulo equilátero. Este triángulo se divide en cuatro triángulos equiláteros iguales y se quita el del centro. Se repite el paso anterior con todos los triángulos que se obtienen.

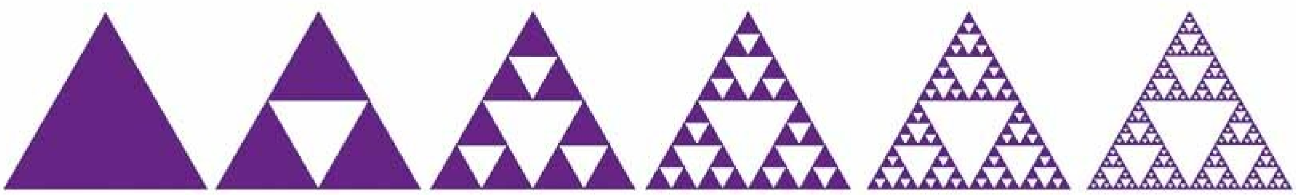


Imagen 0 Imagen 1 Imagen 2 Imagen 3 Imagen 4 Imagen 5

FIGURA 4.3 Sucesión de triángulos en los que a cada triángulo equilátero se le quita la cuarta parte de la superficie que está en su centro.

a) ¿Cuál de las siguientes multiplicaciones permite calcular el número de triángulos morados en la posición 9?

- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

2. Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen su respuesta. Justifiquen por qué consideran que su respuesta es correcta. Una vez que estén de acuerdo en la respuesta correcta, en plenaria, analicen y respondan.

a) ¿Cuál es la sucesión numérica que representa la sucesión de triángulos? Escríbanla en la **TABLA 4.4**.

Número de imagen	0	1	2	3	4	5	6
Número de triángulos morados							
Potencia de 3	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6

TABLA 4.4 Sucesión del número de triángulos morados.

b) ¿Cómo se expresa en forma abreviada la multiplicación que permite calcular el número de triángulos morados de la posición 9?

Formalización

1. En plenaria, realicen una lectura comentada del siguiente texto.

Multiplicaciones con factores iguales como $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ o $10 \times 10 \times 10 \times 10$ se pueden expresar en forma abreviada como 2^6 o 10^4, respectivamente. A esta operación se le conoce como potenciación y a su resultado, potencia. El factor repetido se llama base y el número que indica las veces que se repite el factor se llama **exponente**. Por ejemplo:

Exponente

Potencia → $2^5 = 32$

Base

Se lee "dos elevado a la quinta potencia"; por lo que 32 es la quinta potencia de 2.
De forma general:

Exponente

Potencia → a^n

Base

La potencia cero de cualquier número (excepto el cero) es igual a 1.

$$a^0 = 1, \text{"donde" } a \neq 0$$

La primera potencia de cualquier número (natural, entero, fracción o decimal, positivo o negativo) es igual al mismo número.

$$a^1 = a$$

TIC

Explora en la página www.edutics.mx/Uee podrás resolver varias actividades para familiarizarte con la operación potenciación.

El resultado de $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a}_{n \text{ veces}} = a^n$.

Formalización

1. En plenaria, realicen una lectura comentada del siguiente texto.

Cuando multiplicamos un número por sí mismo, obtenemos el cuadrado de ese número, y se llama así porque se puede representar como un cuadrado. Por ejemplo, el cuadrado del número 3 puede representar un arreglo de 3 × 3.

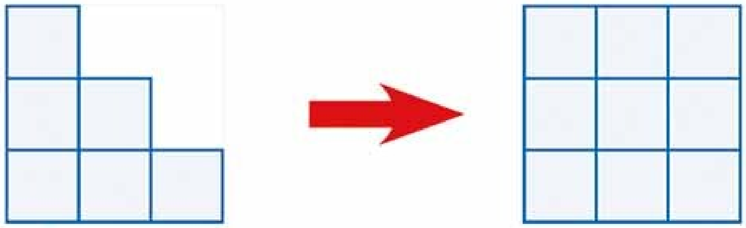


FIGURA 4.4 Cuadrado de tres.

$3 \times 3 = 9$; 9 es el cuadrado de 3.

La operación que se conoce como "raíz cuadrada" consiste en encontrar un número que al elevarlo al cuadrado da como resultado un valor dado. Así, dado un número 9, a la raíz cuadrada de 9 se le denota con el símbolo $\sqrt{9}$. Calcular la raíz cuadrada y elevar un número al cuadrado son operaciones inversas. Es decir, si se calcula la raíz cuadrada de un número c, y el resultado se eleva al cuadrado, $(\sqrt{c})^2$, se obtiene el número original. Por ejemplo: $\sqrt{49} = 7$ porque 7^2 y $7(7) = 49$, esto significa que $(\sqrt{49})^2 = 49$.

$\sqrt{49} = -7$ porque $(-7)^2 = -7(-7)$

En símbolos, $(\sqrt{c})^2 = \pm c$.

Un número cuadrado perfecto es un número que al extraerle raíz cuadrada da como resultado un número entero. En estos casos, se dice que son raíces exactas, es decir, la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto siempre es exacta.

En ocasiones, la raíz cuadrada de un número no es exacta, por lo que sólo se halla una aproximación. Algunos procedimientos de aproximación a la raíz cuadrada de números son el ensayo y error, aproximaciones sucesivas, el método babilónico, entre otros.

Cálculo aproximado de la raíz cuadrada

Para aproximar la medida de cada lado de un cuadrado que tiene área igual a 38 cm^2, se puede utilizar una calculadora y unas tablas como las siguientes:

Medida del lado (cm)	1	2	3	4	5	6	7
Área (cm^2)	1	4	9	16	25	36	49

TABLA 4.5 Área de cuadrados cuyos lados miden una cantidad entera de centímetros.

Con la TABLA 4.5 se determina que el lado del cuadrado es un valor que está entre 6 y 7.

Medida del lado (cm)	6.1	6.2
Área (cm^2)	37.21	38.44

TABLA 4.6 Área de cuadrados aproximada a 38 cm^2, aproximando la longitud de su lado con una cifra decimal.

En la TABLA 4.6 se observa que el lado del cuadrado es un valor que está entre 6.1 y 6.2.

Se puede continuar aproximando el valor del lado del cuadrado de esta forma:

Medida del lado (cm)	6.11	6.12	6.13	6.14	6.15	6.16	6.17
Área (cm^2)	36.12	36.24	36.36	36.48	37.82	37.94	38.06

TABLA 4.7 Área de cuadrados aproximada a 38 cm^2, aproximando la longitud de su lado con dos cifras decimales.

En la TABLA 4.7 se observa que el lado del cuadrado es un valor que está entre 6.16 y 6.17.

Se puede continuar con estos métodos de aproximación hasta obtener el valor del lado del cuadrado con el número de cifras decimales que se desee. Con la práctica es posible prescindir de las tablas y registrar sólo los valores entre los cuales sabemos que está la raíz cuadrada que se está buscando.

El método para calcular la raíz cuadrada inventado por los babilonios consiste en ir transformando un rectángulo con un área dada, en rectángulos de la misma área pero con lados que se aproximen a la raíz cuadrada buscada. Ejemplo, para obtener una aproximación de $\sqrt{40}$, se hace lo siguiente:

1. Se buscan dos números que multiplicados den 40, estos corresponden a los lados del rectángulo en la figura.

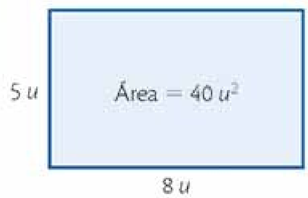


FIGURA 4.5 Primer rectángulo del método babilonio.

2. Se calcula el promedio de la longitud de los lados anteriores e indiquen esta longitud en la base del rectángulo verde.

$$\frac{8+5}{2} = 6.5$$

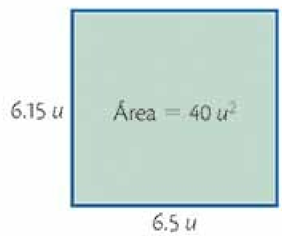


FIGURA 4.6 Segundo rectángulo del método babilonio.

3. Luego se calcula cuánto mide la altura. Esto se calcula dividiendo el área entre la longitud de la base del rectángulo: $40 \div 6.5 = 6.15$.

4. Se repite el procedimiento anterior, calculando el promedio de la longitud de los lados en el rectángulo verde e indicar esta longitud en la base del rectángulo rojo.

$$\frac{6.5 + 6.15}{2} = 6.325$$

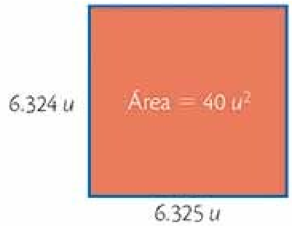


FIGURA 4.7 Tercer rectángulo del método babilonio.

5. Luego, se calcula cuánto mide la altura: $40 \div 6.15 = 6.324$
Los lados del rectángulo anterior son casi iguales, entonces:
$6.324 < \sqrt{40} < 6.325$, porque $6.324 \times 6.325 \approx 40$. Por tanto, la $\sqrt{40} \approx 6.324$
El símbolo $\approx$ significa aproximadamente.

Un reto más

e

1. En equipo de tres integrantes, resuelvan el siguiente problema:

En la FIGURA 4.4, el cuadrado blanco mide 12 cm por lado. Los vértices del cuadrado azul están situados en el punto medio de cada lado del cuadrado blanco.

a) ¿Cuánto mide el área del cuadrado azul?
b) ¿Cuánto mide cada uno de los lados del cuadrado azul?

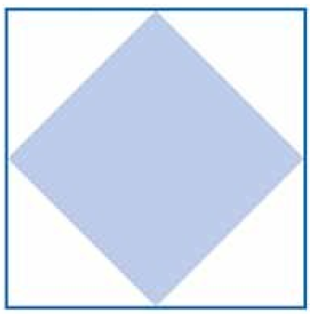


FIGURA 4.8 Cuadrado blanco y cuadrado azul.

2. Reúnanse con otro equipo y comparen los procedimientos que siguieron para determinar el área y las dimensiones del cuadrado. Comenten cómo fue que hicieron las operaciones. Luego, entre todos respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Qué número elevado a la segunda potencia da como resultado 36?
b) ¿Qué número elevado a la segunda potencia da como resultado 144?
c) ¿Cuánto mide por lado cada uno de los siguientes cuadrados?

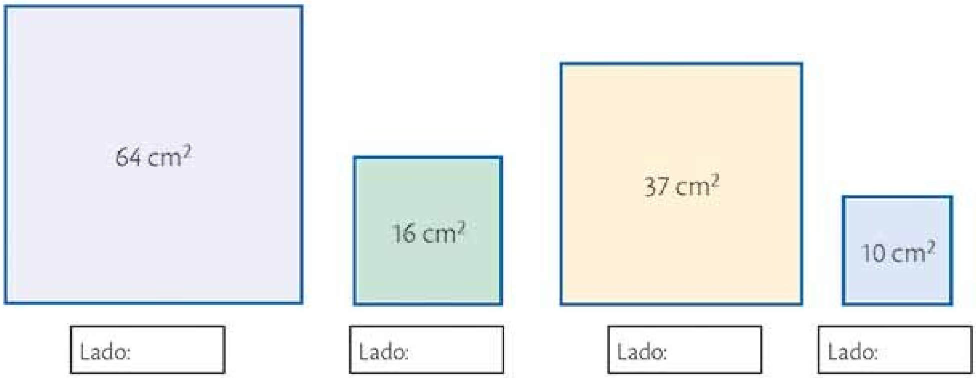


FIGURA 4.9 Cuadrados con diferentes medidas de superficie.

¡A practicar!

1. De manera individual, resuelve los siguientes problemas:

a) Las bacterias son seres vivos minúsculos que se reproducen dividiéndose por la mitad cada cierto tiempo. Suponemos que una bacteria se divide cada minuto. En ese caso, después de dos minutos tendríamos cuatro bacterias, a los tres minutos ocho bacterias y así sucesivamente. ¿Cuántas bacterias habrá a las dos horas? Expresa la respuesta con una potencia.

b) Se quieren distribuir los 529 alumnos de una escuela formando un cuadrado. ¿Cuántos alumnos habrá en cada lado del cuadrado?

c) Un albañil utilizó 4 900 baldosas cuadradas de 20 cm por lado para cubrir una habitación cuadrada. ¿Cuántos metros mide el lado de la habitación?

d) Halla el número por el que debes cambiar la letra *a* para que la raíz cuadrada del número 12.32*a* sea exacta.

e) Un terreno cuadrado tiene una superficie de 63 504 m^2. ¿Cuál es la longitud que tiene la valla que le rodea?

f) Un propietario tiene un terreno cuyas dimensiones son 32 m de largo por 8 m de ancho, y quiere permutarlo por un terreno cuadrado de la misma superficie. ¿Cuál debe de ser el lado del terreno cuadrado?

g) Teniendo en cuenta que 121 es el cuadrado de 11, ¿el número decimal 12.1 será cuadrado perfecto? Explica en qué fundamentas la respuesta

2. Calcula el resultado de las operaciones:

a) $6^4 =$ ____________ **b)** $7^3 =$ ____________ **c)** $10^7 =$ ____________

d) $4^6 =$ ____________ **e)** $(4.3)^2 =$ ____________ **f)** $(1.5)^3 =$ ____________

g) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 =$ ____________ **h)** $\left(\frac{3}{2}\right)^3 =$ ____________ **i)** $10^4 =$ ____________

3. Completa las siguientes potencias y reescríbelas como raíz.

$(\quad)^2 = 25$, así $\sqrt{25} =$ ________ $(\quad)^2 = 144$, así $\sqrt{144} =$ ________

$(\quad)^2 = 25$, así $\sqrt{25} =$ ________ $(\quad)^2 = 144$, así $\sqrt{144} =$ ________

$(\quad)^2 = 100$, así $\sqrt{100} =$ ________ $(\quad)^2 = 225$, así $\sqrt{225} =$ ________

$(\quad)^2 = 100$, así $\sqrt{100} =$ ________ $(\quad)^2 = 225$, así $\sqrt{225} =$ ________

Portafolio de evidencias

Incluye para tu portafolio de evidencias la solución al Reto donde especifiques claramente el procedimiento que seguiste para determinar cuántos virus habrá al cabo de 6 horas.

4. Utiliza alguno de los métodos anteriores para calcular la solución positiva con una aproximación, hasta centésimos, de las siguientes raíces cuadradas. Verifica tus resultados con la calculadora..

$\sqrt{2} \approx$ ______ $\sqrt{44} \approx$ ______ $\sqrt{75} \approx$ ______ $\sqrt{130} \approx$ ______

5. Calcula la solución positiva de las siguientes raíces cuadradas exactas. Considera que $0.1^2 = 0.01$ y $3^2 = 9$.

$\sqrt{0.09} =$ ______ $\sqrt{1.44} =$ ______ $\sqrt{0.25} =$ ______

$\sqrt{2.25} =$ ______ $\sqrt{0.16} =$ ______ $\sqrt{0.49} =$ ______

$\sqrt{0.01} =$ ______ $\sqrt{4.41} =$ ______ $\sqrt{0.81} =$ ______

Para terminar

1. Revisa toda la lección, verifica que tus respuestas sean correctas, luego, escribe en tu cuaderno qué conocimientos y habilidades nuevas adquiriste y cuáles recordaste para realizar potencias y raíces cuadradas. Anota cualquier duda que tengas para consultarla con tu profesor.

TIC

En una hoja de cálculo, existe una fórmula para calcular la potencia de cualquier número. Por ejemplo, para calcular la potencia de 5^7, se escribe =POTENCIA(5,7) y se da Enter.

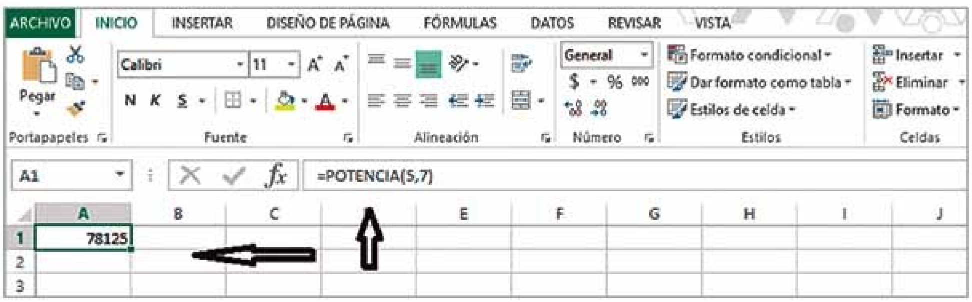


FIGURA 4.10 Fórmula para calcular potencias en la hoja electrónica de cálculo.

También existe una fórmula para calcular la raíz cuadrada de cualquier número. Por ejemplo, para calcular la raíz cuadrada de 67 escribe =RAIZ(67) y se da Enter.

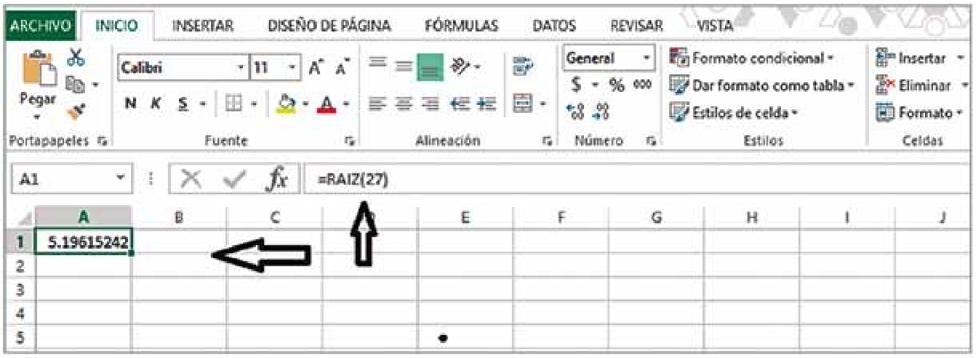


FIGURA 4.11 Fórmula para calcular la raíz cuadrada en la hoja electrónica de cálculo.

Para leer

Las ternas pitagóricas

Entre las grandes civilizaciones antiguas, los griegos se distinguieron por su gran dedicación al estudio de los números. Según algunos investigadores, Pitágoras, el gran matemático griego del siglo VI a. n. e., fundó una secta cuyos seguidores afirmaban que los números constituían la esencia del Universo. Los pitagóricos, como se llamó después a este grupo, fueron los primeros en estudiar las propiedades de los números naturales; incluso, en algunos casos les atribuían propiedades mágicas. Los números cuadrados, como 4, 9, 16 y 25, eran estudiados de manera especial, y muy pronto los pitagóricos descubrieron que la suma de ciertas parejas de números cuadrados daba como resultado un número también cuadrado. Por ejemplo:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$9 + 16 = 25$$

Tres números cuyos cuadrados cumplan la relación anterior son llamados ternas pitagóricas; en este caso, 3, 4 y 5 forman una terna pitagórica.

Los siguientes números cuadrados también dan como resultado un número cuadrado:

$$25 + 144 = 169$$
$$36 + 64 = 100$$

Encuentra las ternas pitagóricas de cada uno.
Investiga si existen más ternas pitagóricas.

Contagios

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de potencias con exponente entero y aproxima raíces cuadradas

Contenido: Productos y cocientes de potencias

Para arrancar

1. Lee detenidamente la siguiente información y responde lo que se pregunta.

La reproducción asexual se presenta en organismos unicelulares y es el proceso biológico a través del cual un organismo crea copias genéticamente similares a sí mismo como se puede observar en la **FIGURA 5.1**. Uno de los tipos de reproducción asexual es la **bipartición**, que es el mecanismo más sencillo en organismos unicelulares; consiste en la división del núcleo dando lugar a dos células hijas idénticas. En biología, este proceso se le conoce como mitosis.

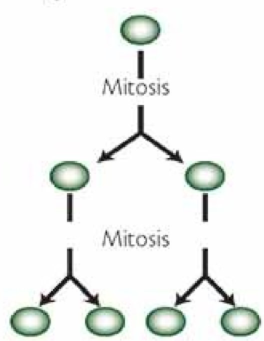


FIGURA 5.1 Esquema de la mitosis.

Los organismos unicelulares como los hongos microscópicos conocidos como **levadura** se reproducen por bipartición. En un estudio sobre la división celular, se determinó que un cierto tipo de levadura se reproduce por bipartición con una regularidad como se muestra en la **TABLA 5.1**.

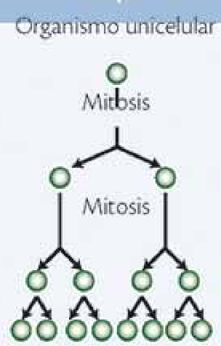
Esquema	Tiempo en minutos	Número de células
	0	2^0
	1	2^1
	2	2^2
	3	2^3
	4	2^4

TABLA 5.1 Reproducción de un organismo unicelular durante los primeros 4 minutos desde su observación.

LECCIÓN 5

Glosario

Bipartición. División de una cosa en dos partes.
Levadura. Se denomina levadura a cualquiera de los diversos hongos microscópicos unicelulares que son importantes por su capacidad para realizar la descomposición mediante fermentación de diversos cuerpos orgánicos, principalmente los azúcares.

a) De acuerdo con la información dada en la tabla, si se cultiva una célula de esta levadura:
- ¿Qué tiempo debe transcurrir para que haya 2 048 células?

____

- ¿Por qué? ______________________________

2. Reúnete con otros compañeros y comparen sus respuestas. En caso de que no coincidan, expliquen cómo calcularon el tiempo para una reproducción de 2 048 células.
   a) Representen en la TABLA 5.2 el número de células por minuto transcurrido.

Minutos transcurridos	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Número de células												

TABLA 5.2 Número de organismos por minutos transcurridos desde su observación en el tiempo 0.

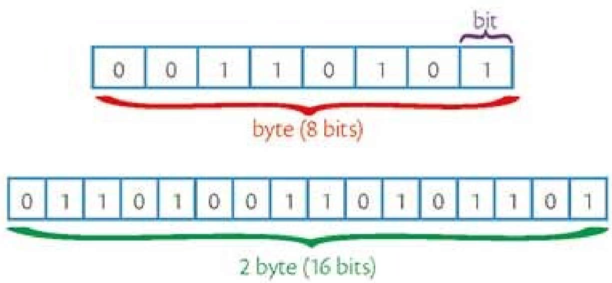
Reto

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

La capacidad de las computadoras se mide en bits y en bytes. Un bit es la unidad más pequeña y solo puede tomar dos valores: 0 o 1. Un byte son 8 bits, que puede ser expresado como 2^3 bits. Conforme la capacidad de las computadoras ha ido creciendo con el desarrollo de sus componentes, se han tenido que utilizar otras unidades como kilobyte (KB), megabyte (MB), gigabyte (GB), terabyte (TB), etcétera.

   a) De acuerdo con la información, si un CD-ROM puede almacenar 700 MB, ¿cuántos bytes puede almacenar?

____



2^3 bits = 1 byte
2^{10} bytes = 1 kilobyte
2^{10} kilobytes = 1 megabyte
2^{10} megabytes = 1 gigabyte
2^{10} gigabytes = 1 terabyte
2^{10} terabytes = 1 petabyte
2^{10} petabytes = 1 exabyte

FIGURA 5.2 Esquema de la medición en bytes.

2. Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen su respuesta. En caso de que no coincidan muestren qué operaciones hicieron para encontrar la cantidad de bits. Una vez que estén de acuerdo con la respuesta correcta, entre todos respondan las siguientes preguntas.
   a) ¿Cómo obtuvieron la respuesta?
   b) ¿Todos utilizaron la misma operación para realizar el cálculo?

3. Con el mismo equipo, analicen la siguiente información y respondan lo que se pregunta.

e

Unidad	1 byte	1 KB	1 MB	1 GB	1 TB	1 PB	1 EB
Equivalencia	2^3 Bits	2^{10} bytes	2^{10} KB	2^{10} MB	2^{10} GB	2^{10} TB	2^{10} PB

TABAL 5.3 Múltiplos de bits y bytes.

a) ¿Cuál de las siguientes operaciones permite calcular el número de bits que equivalen a 1 024 bytes?

$2^3 \times 2^{10}$ $\quad$ $2^3 \times 2^{10} \times 2^{10}$ $\quad$ $2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}$ $\quad$ $2^{10} \times 2^{10}$

b) ¿A cuántos bytes equivalen 2^{10} MB? __________

c) ¿Qué representa la operación $2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}$? __________

g

4. Con la coordinación de su docente, en sesión grupal, dos equipos voluntarios explican cómo es que llegaron a un acuerdo entre los integrantes sobre la resolución del problema. Luego explican sobre las respuestas de las preguntas anteriores. Si otro equipo tiene un método distinto de cálculo y otra respuesta, puede pasar a explicarlo.

Pistas

De acuerdo con la información que se da sobre la capacidad de almacenamiento:

- ¿Cuál es la multiplicación que representa 2^3 bits?
- ¿Qué indica el exponente de 2^{10}?
- ¿Cuál es la multiplicación con factores iguales que equivale a 2^{10}?
- ¿La potencia 2^{10} se puede expresar como $2^5 \times 2^5$?

Para analizar

Un nuevo reto

p

1. Reúnete con un compañero y analicen el siguiente esquema. Usen una calculadora para verificar si la operación $5^2 \times 5^4$ es igual a 5^6.

$$5^2 \times 5^4$$
$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6$$

a) ¿Cómo se obtuvo el exponente del resultado del producto de dos factores con la misma base y diferente exponente? __________

b) Justifiquen su afirmación con los siguientes productos de potencias.

$2^3 \times 2^5 = 2^{\_\_}$ $\quad$ $10^3 \times 10^2 = 10^{\_\_}$ $\quad$ $4^2 \times 4^3 \times 4^5 = 4^{\_\_}$

c) Completen la siguiente tabla, luego, completen la expresión algebraica que representa la regla general para calcular el producto de potencias de la misma base.

×	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5
3^1	3^2				
3^2		3^4			
3^3			3^6		
3^4				3^8	
3^5					3^{10}

TABLA 5.4 Tabla de multiplicación de las potencias de tres.

Regla general:

$a^m \times a^n = a$___

Analiza la regularidad que se observa de los exponentes en los productos de la tabla 5.4 y responde:

- ¿Cómo son las bases de los factores?
- ¿Cómo se obtiene el exponente del producto, por ejemplo, 3^8 al multiplicar $3^4 \times 3^4$?

¡Importante!

Recuerda:

El resultado de la multiplicación o división de dos números positivos o de dos números negativos, es un número positivo; mientras que el resultado de la multiplicación o división de un número positivo y un número negativo, es un número negativo.

2. Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros.
   a) En caso de que haya diferencias, verifiquen por qué.
   b) De acuerdo con las respuestas que compararon respondan lo siguiente.
      - ¿Cómo se realiza la multiplicación de potencias con más de dos factores, iguales como la siguiente?

$$3^5 \times 3^2 \times 3^4 =$$

      - ¿Por qué se obtienen resultados distintos en las siguientes operaciones?

$$-(3^4) = -(3 \times 3 \times 3 \times 3) = -81$$
$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$$

3. En equipo analicen la siguiente información y realicen lo que se pide. Justifiquen sus respuestas, ya que esto les servirá para argumentar en la puesta en común con todo el grupo.

Potencia de una potencia

Si queremos calcular por ejemplo $(4^2)^3$ utilizamos el siguiente razonamiento.

$$(4^2)^3 = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{(2+2+2)} = 4^{(2\times3)} = 4^6$$

a) Escriban cómo se resuelve una potencia de una potencia: ______________________

____

b) Cada una de las siguientes operaciones es una potencia elevada a otra potencia. ¿Cuál es el resultado de cada operación expresado como una sola potencia?

$(2^3)^2 = 2^{[\ \ ]}$ $(4^2)^3 = 4^{[\ \ ]}$ $(6^3)^4 = 6^{[\ \ ]}$

$(4^3)^2 = 4$___ $(2^5)^2 =$ _____ $(3^2)^5 =$ _____ $(7^n)^m = 7$___

c) Cada una de las siguientes operaciones es un cociente de potencias de la misma base. ¿Cuál es el resultado de cada operación expresado como una sola potencia?

$$\frac{6^5}{6^2} = \frac{6\times6\times6\times6\times6}{6\times6} = \frac{6}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 =$$

$$\frac{9^7}{9^3} = \frac{9\times9\times9\times9\times9\times9}{9\times9\times9} = \frac{9}{9} \cdot \frac{9}{9} \cdot \frac{9}{9} \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 =$$

$$\frac{10^6}{10^4} = \frac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10 \times 10 \times 10} = \frac{10}{10} \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{10}{10} \cdot 10 \cdot 10 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 10 =$$

d) Completen la regla general para calcular una potencia elevada a otra potencia, cuando las bases son iguales y la regla general para calcular el cociente de potencias cuando las bases también son iguales.

Formalización

1. Comparen sus respuestas con las de otros quipos. En caso de que haya diferencias, verifiquen por qué. Luego, con la guía de su docente, realicen una puesta en común de sus reglas generales y confróntenlas con las que aparecen enseguida.

El resultado de una multiplicación de potencias con la misma base, es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes. Ejemplo:

$$10^3 \times 10^2 = 10^{[3+2]} = 10^5$$

De manera general es: $(a^m)(a^n) = a^{m+n}$

La **Potencia de una potencia** es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes. $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Por ejemplo: $(5^2)^3 = 5^6$

El **Cociente de potencias** con la misma base es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Por ejemplo:

$$\frac{8^5}{8^2} = 8^{5-3} = 8^2$$

La potencia cero de cualquier número (excepto el cero) es igual a 1, por ejemplo:

$$\frac{4^2}{4^2} = 4^{2-2} = 4^0 = 1$$

La primera potencia de cualquier número es igual al mismo número, por ejemplo:

$$\frac{5^2}{5^1} = 5^{2-1} = 5^1 = 5$$

Un número entero elevado a una potencia negativa es igual al recíproco o inverso del número elevado a la potencia positiva. Dicho de otra manera, todo número elevado a una potencia con exponente negativo es igual al cociente de la unidad entre la potencia con exponente positivo.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}\text{; donde } a \neq 0$$

Ejemplo: $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$

2. En plenaria, discutan lo siguiente, realicen la operación que se da para justificar lo que se cuestiona en cada caso:

- ¿$\frac{1}{2^2}$ es equivalente a 2^{-2}?

  $\frac{2^3}{2^5} =$

- ¿2^0 es igual a 1?

  $\frac{2^3}{2^3} =$

- ¿2^1 es igual a 2?

  $\frac{2^3}{2^2} =$

a) De acuerdo con lo anterior, completen las siguientes afirmaciones:

- Todo número distinto de cero elevado a la potencia cero es igual a ____________
- Todo número elevado a la potencia 1 es igual ______________________
- Todo número elevado a una potencia con exponente negativo es igual al cociente de la unidad entre la potencia con exponente ______________

¡A practicar!

1. De manera individual, haz lo que se pide en cada caso.

a) Los resultados de las siguientes operaciones pueden ser expresados como una sola potencia, encuentra diferentes maneras de hacerlo, en caso de que sea posible.

- $(-3)^3(-3^5)(9) =$
- $(2^2)(2^4)(32) =$
- $\frac{(-2+6)^2(4-2)^3}{2^3} =$
- $4^{-3} \div 4^{-2} =$

b) Expresa el resultado de las siguientes operaciones como una sola potencia. Luego, verifica con tu calculadora.

- $(2^2)^4 =$
- $(2^1)^4 =$
- $(-4^3)^4 =$
- $(-10^2)^3 =$
- $(7^5)^7 =$
- $\frac{3^7}{3^5} =$
- $\frac{5^5}{5^1} =$
- $\frac{4^5}{4^5} =$
- $\frac{10^8}{10^3} =$
- $\frac{10^{10}}{10^9} =$

c) ¿Qué número debe ir en cada línea para que las igualdades sean correctas?

- $6^{[\_\_]} \times 6^3 = 6^8$
- $\frac{8^3}{8^{[\_\_]}} = 8$
- $10^5 \times 10^{[\_\_]} = 10^{10}$
- $\frac{7^{[\_\_]}}{\_\_^{7}} = 7^3$
- $[\_\_]^7 \times [\_\_]^9 = 9^{\_\_}$
- $(6^3)^5 = 6^{[\_\_] \times [\_\_]} = 6^{[\_\_]}$
- $[\_\_]^6 \times [\_\_]^9 = 5^{15}$
- $([\_\_]^2)^{[\_\_]} = [\_\_]^{2 \times [\_\_]} = 9^{20}$
- $[\_\_]^{10} \times 10^{[\_\_]} = 10^{11}$
- $\frac{\_\_^{4}}{\_\_^{3}} = 3^0$

Portafolio de evidencias

Incluye para tu portafolio de evidencias la solución al Reto donde especifiques claramente cómo determinaste la cantidad de bytes que se puede almacenar en un CD-ROM de 700 MB.

Para terminar

1. Revisa toda la lección, verifica que tus respuestas sean correctas, luego, escribe en tu cuaderno qué conocimientos y habilidades nuevas adquiriste y cuáles recordaste para realizar operaciones con potencias. Anota cualquier duda que tengas para consultarla con tu profesor.

TIC

1. Con base en lo que has estudiado en la lección, sabemos que $10^2 \times 10^5 = 10^{2+5} = 10^7$. Para verificar esto, haz lo siguiente:
   a) Abre una página de la hoja electrónica de cálculo y posiciónate en la celda que tú quieras.
   b) Escribe la fórmula =POTENCIA(10,2)*POTENCIAS(10,5). Observa cómo el primer paréntesis corresponde a 10^2 y el segundo paréntesis corresponde a 10^5.

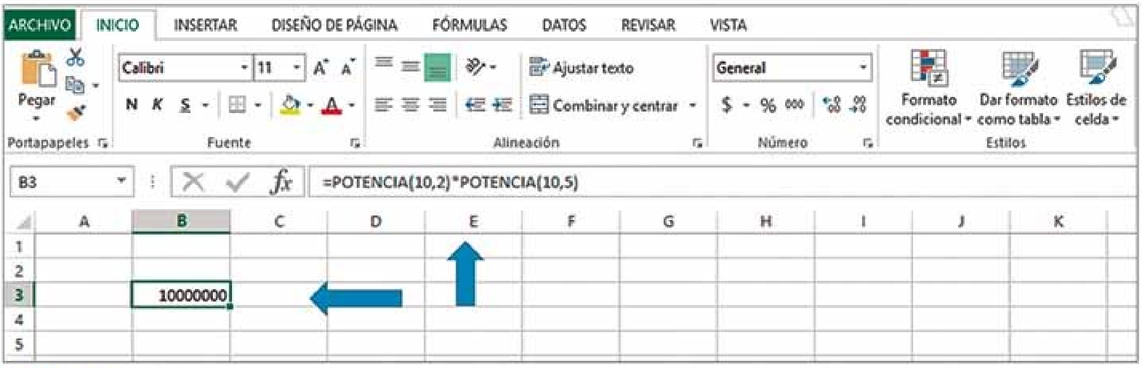


FIGURA 5.3 Cálculo de potencias en una hoja de cálculo.

   c) Haz lo mismo para un cociente de potencias, por ejemplo, para comprobar que es correcto que $\frac{10^2}{10^5} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$ introduce la siguiente fórmula: =POTENCIA(10,2)/POTENCIAS(10,5).

Para leer

Las bacterias

Las bacterias son microorganismos que se encuentran presentes en todos lados y muchas veces son causantes de enfermedades. Las bacterias, como todo ser vivo, se reproducen. El mecanismo de reproducción habitual en bacterias es la bipartición. Mediante este mecanismo se obtienen dos células hijas, con idéntica información en el ADN. Las células hijas son clones de la progenitora. Por este sistema de reproducción se puede originar una colonia de células con material idéntico; sin embargo, esto no ocurre debido al alto índice de mutaciones que se producen en las bacterias.

Si una colonia de bacterias empieza con 1 bacteria, en la primera reproducción, esta generará 2 bacterias. Cada una de las bacterias hijas, generará 2 bacterias, y así sucesivamente hasta generar una colonia con miles de bacterias. A este tipo de crecimiento se le llama *crecimiento exponencial*.

Texto tomado y adaptado de: http://recursos.cnice.mec.es/biosfera/alumno/2bachillerato/micro/contenidos6.htm. (Fecha de consulta: 15 de junio de 2018)

Un reparto justo

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Contenido: Resuelve problemas de reparto proporcional

Para arrancar

1. Amanda pagó $900 pesos por 12 velas aromáticas que va a regalar a sus amigas.
   a) ¿Cuánto pagaría por seis velas iguales?
   b) ¿Y cuál sería el precio de nueve de ellas?
   c) Compara tu trabajo con el de tus compañeros, ¿es posible que hayan llegado a distintos resultados siguiendo diferentes caminos?
   d) Corroboren sus respuestas para saber cuáles son las correctas. Comenten esto entre ustedes y con su profesor.

Reto

1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica.

Rosa, Azul y Blanca, hicieron collares para venderlos y obtener dinero para depositarlo en una cuenta de ahorros. Rosa hizo 18 collares, Azul 9, y Blanca 13. Por la venta de todos sus collares obtuvieron $2 400, los cuales van repartir de acuerdo con la cantidad de collares que cada una hizo.

   a) Encuentren cuánto dinero le tocará a cada quien. Todos los collares son similares y se vendieron al mismo precio.
   b) Comparen sus procedimientos y respuestas con los de otros equipos. ¿Cómo pueden comprobar los resultados? Comenten también en el grupo y con su profesor. Luego contesten la pregunta: Si por 40 collares obtuvieron $ 2400, ¿cuánto obtendrían por 20, por 10 y por 5 collares, respectivamente?

Relaciónalo

Si entre dos conjuntos de cantidades existe una relación de proporcionalidad directa habrá un número por el que puedas multiplicar los valores del conjunto A y encontrar los valores correspondientes en el conjunto B. Ese número se llama **factor constante** o **constante de proporcionalidad**. Así, al dividir valores de una cantidad entre sus correspondientes de la otra, se obtienen razones equivalentes.

Cuando dos cantidades son directamente proporcionales y se desconocen algunos valores, estos pueden encontrarse por medio de varios procedimientos, por ejemplo, por conservación de razones; por suma término a término; usando el valor unitario; o la constante de proporcionalidad. Si lo consideran necesario, consulten sus materiales de primer grado.

Pistas

1. Algunas de las siguientes preguntas y sugerencias te pueden ayudar para resolver el Reto.
   - ¿Cuáles son las cantidades que intervienen en este problema?
   - ¿Hay relación entre ellas?
   - ¿Conoces todos los datos de estas cantidades o te faltan algunos?
   - ¿Quién hizo más collares, y quién menos?
   - Las cantidades involucradas, ¿aumentan o disminuyen juntas?
   - ¿Cómo puedes encontrar los valores faltantes?
   - ¿Hay alguna cantidad que permanezca constante?
   - Consideren la posibilidad de construir una tabla donde puedan observar las cantidades con los valores que conoces y los que te faltan.

LECCIÓN 6

Para analizar

Un nuevo reto

e

1. Por equipos lean la siguiente situación y hagan lo que se indica.

Camilo va a pintar el exterior de su casa. La superficie que va a ser pintada tiene en total 160 metros cuadrados, y ya pidió a la tienda los 20 botes de pintura, de cuatro litros cada uno, que se necesitan.

Los vecinos le van a ayudar a pintar. Para empezar, Camilo desea que se coloquen los botes justo frente a las diferentes paredes o partes del exterior de la casa que se van a pintar.

a) ¿Cómo pueden saber cuántos de los botes de pintura deberán poner frente a cada parte de su casa? ________________

b) Completen la **TABLA 6.1**.

FIGURA 6.1 Vista exterior de la casa a pintar.

Parte del exterior de la casa	Fachada	Costado norte	Costado sur	Pared trasera	Total
Superficie (m^2)	32	56	48	24	160
Número de botes					

TABLA 6.1 Medida de la superficie de cada parte de la casa, en metros cuadrados.

- Determinen si la superficie de cada parte de la casa, y el número de botes de pintura son directamente proporcionales.

c) Consideren que todas las superficies de la casa tienen el mismo acabado y están en igualdad de condiciones, de manera que van a requerir la misma cantidad de pintura por cada metro cuadrado y para cubrir 10 m^2 se necesita un cierto número de botes de pintura.

- ¿Para cubrir 30 m^2 de pared se necesitará el triple de pintura? __________
- ¿Cuánta pintura sería necesaria si se quieren cubrir cinco metros cuadrados? __________
- ¿Por qué? __________

Se vale

Colaboración e interdependencia

¿Consideran que los vecinos están mostrando una actitud de colaboración y de trabajo en equipo?

Comenten en el grupo, y den ejemplos de donde esto se observe en su comunidad.

- ¿Las consideraciones anteriores nos indican que las superficies en metros cuadrados y los números de botes son directamente proporcionales? Expliquen su respuesta:

____

____

____

Formalización

Cuando dos conjuntos de cantidades son directamente proporcionales, si se dividen valores de una cantidad entre sus correspondientes valores de la otra, se obtienen razones equivalentes. Esta operación nos proporciona la constante de proporcionalidad, que a su vez nos sirve para encontrar valores faltantes.

En este problema, la constante de proporcionalidad puede ser útil para encontrar el número de botes necesarios. Obtengan la razón de botes de pintura por metros cuadrados de superficie por cubrir:

$$\text{Razón de botes de pintura por m}^2\text{ de pared} = \frac{\_\_\_\_\text{ botes}}{160\text{ m}^2} = \_\_\_\_\ \_\_\_\_\ \frac{\text{botes}}{\text{m}^2}$$

Ahora se puede utilizar esta razón para encontrar el número de botes que se necesitan para una de las paredes de la casa; por ejemplo, para la fachada:

$$\begin{aligned}\text{Número de botes para la fachada} &= (\text{Razón de botes por m}^2) \times (\text{m}^2\text{ de la fachada})\\ &= (\text{Razón de botes por m}^2) \times (32\text{ m}^2\text{ de la fachada})\end{aligned}$$

$$\text{Número de botes de pintura para la fachada} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Completen la tabla anterior, calculando el número de botes que corresponden a las otras partes de la casa de Camilo. Pueden utilizar este mismo procedimiento, o aplicar otro de los que conocen para resolver problemas de proporcionalidad directa.

e

¿Cómo pueden verificar en este caso los resultados que obtengan? Expliquen:

____

____

Comparen entre equipos sus procedimientos y resultados y comenten con su profesor.

En situaciones como las del Reto y Un nuevo reto, el problema consiste en repartir o distribuir el total de un conjunto de cantidades, de acuerdo con los valores de otro conjunto de cantidades:

- Distribuir el total obtenido por la venta de los collares, ________ pesos, de acuerdo con el número de collares elaborado por cada una de las amigas.
- Repartir el total de ________ botes de pintura, entre las distintas partes de la casa, las cuales tienen diferentes superficies en metros cuadrados.

Para poder aplicar alguno de los procedimientos que conocen para encontrar valores faltantes, hay que asegurarse de que la relación entre las cantidades sea de proporcionalidad directa:

- Por equipos, recuperen cómo se determina si dos cantidades son directamente proporcionales; elaboren un ejemplo sencillo y explíquenlo a otro equipo.
  ______
- Describan uno de los procedimientos para determinar valores faltantes, cuando la relación entre dos cantidades es de proporcionalidad directa.
  ______

En un problema de reparto, después de haber verificado que se trata de una relación de proporcionalidad directa.

- ¿Cuál es el siguiente paso? ______
- ¿Cómo se empiezan a calcular los valores faltantes? ______
- ¿Qué hicieron al resolver el Reto y Un nuevo reto? Expliquen su respuesta.
  ______

Cuando dos conjuntos de cantidades son directamente proporcionales, y hay que repartir el total de una de ellas de acuerdo con los diferentes valores del otro conjunto, se dice que se hace un reparto proporcional, y que la primera cantidad se reparte proporcionalmente a la segunda. Para efectuar el reparto:

- Se verifica que las cantidades sean directamente proporcionales.
- Se aplica un procedimiento para encontrar valores faltantes.

Para comprobar los resultados en un problema de reparto proporcional, la suma de los valores faltantes que se calcularon debe ser igual al total; por ejemplo, la suma de lo que se reparta a las tres amigas, debe ser igual al total obtenido por las ventas de los collares. También se pueden utilizar alguno de los otros procedimientos que han estudiado para calcular valores faltantes.

Expliquen y validen en el grupo, bajo la guía de su profesor, los resultados y los diferentes procedimientos que hayan surgido al resolver el Reto y Un nuevo reto.

Un reto más

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema:

Valeria, Rodrigo y Pamela viven en una unidad habitacional. En el edificio E1 con 34 departamentos vive Valeria. En el edificio E2 con 48 departamentos vive Rodrigo, y en el edificio E3 con 43 departamentos vive Pamela.

Los vecinos de estos tres edificios han decidido construir una piscina en común. El presupuesto de la obra asciende a $130 000.00. Han decidido aportar dinero a la obra proporcionalmente al número de departamentos.

a) ¿Cuánto ha de aportar a la construcción todos los vecinos de cada edificio?
En el edificio donde vive Valeria aportarán $ ______
En el edificio de donde vive Rodrigo aportarán $ ______
En el edificio donde vive Pamela aportarán $ ______

b) Comparen sus respuestas con las de otras parejas de compañeros. Muestren sus cálculos que hicieron.

¡A practicar!

1. Resuelve los siguientes problemas describiendo sus procedimientos y comparen con los de sus compañeros.
   - a) Las familias de Pablo y Ricardo van a un restaurante y deciden dividir la cuenta de acuerdo con el número de miembros de la familia de cada uno, incluidos ellos mismos. La familia de Pablo está integrada por cuatro personas y la de Ricardo, por seis. Si la cuenta fue de $850, ¿cuánto pagó cada familia?
   - b) Édgar va a cocinar varios cortes de carne de diferentes tamaños. Dispone de dos litros de una salsa especial para sazonar las piezas de carne antes de cocinarlas. Diseñen y resuelvan un problema sobre cómo Édgar puede repartir la salsa disponible entre diferentes cortes o piezas de carne de distintos tamaños.
   - c) Cuatro amigos ganaron un premio de $15 000 en un sorteo y se lo repartieron proporcionalmente a lo que cada uno aportó para la compra del boleto que costó $100. Al primero le tocó $2 100, al segundo $5 700, al tercero $3 300 y al cuarto el resto de los $15 000.
     ¿Cuánto aportó cada amigo para la compra del boleto? ____________________
   - d) Se va a construir un puente en el camino entre los pueblos de Los Tomates y Arroyo Grande. El puente va a costar $980 000. El gobierno estatal aportará $370 000 y el gobierno federal contribuye con igual cantidad. El resto lo tendrán que aportar los pueblos, de acuerdo con el número de sus habitantes: 960 en Los Tomates, 1 440 en Arroyo Grande. ¿Cuánto tendrá que aportar cada uno de los pueblos?

TIC

1. Reúnete con un compañero y hagan lo que se indica.
   - a) Seleccionen uno de los problemas de la sección ¡A practicar!
   - b) En una hoja de cálculo, elaboren una tabla con la cual efectuar el reparto proporcional que se requiera en esa situación; por ejemplo, para el problema 2, la tabla podría ser como la siguiente:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3			Corte de carne (g)	Cantidad de salsa (ml)					
4			125						
5			250						
6			300						
7			375						
8			400						
9			450						
10			600						
11		TOTAL							
12									
13									
14		Total de salsa (ml):		2000					
15									
16									

FIGURA 6.2 Tabla para verificar proporcionalidad.

c) Resuelvan y expliquen su procedimiento a otro equipo, en particular cómo determinaron las fórmulas para obtener las diferentes cantidades de salsa y cómo comprobaron sus resultados.

d) Si no tienen computadora, resuelvan con calculadora; expliquen a otro equipo cuál fue la secuencia de teclas que utilizaron para obtener las cantidades de salsa, y por qué usaron esas teclas.

Comparen los trabajos de los distintos equipos y comenten con su docente.

Para terminar

Portafolio de evidencias

Incluye para tu portafolio de evidencias la solución al Reto, así como la resolución de un problema de reparto proporcional donde hayas utilizado otro procedimiento.

1. Revisa la lección y escribe en tu cuaderno qué conocimientos y habilidades nuevas adquiriste y cuáles recordaste sobre reparto proporcional y sobre valores faltantes en situaciones de proporcionalidad directa. Anota cualquier duda que tengas para consultarla con tu profesor.
2. Resuelve lo siguiente.

Gabriela, Gastón y Jerónimo trabajan en equipo en biología. Para un proyecto de esa asignatura, tienen que tomar fotos. Gastón tomó el triple de las que capturó Gabriela, y Jerónimo el doble. Obtuvieron 72 en total. ¿Cuántas fotos tomó cada quien?

Para leer

¿Cuántos diputados federales tiene tu estado?

La cámara de diputados de nuestro país está formada por 500 diputados, de los cuales 300 son electos por mayoría relativa, y 200 por representación proporcional (Artículos 52 y 53 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos: http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/1_150917.pdf, fecha de consulta: 29 de enero de 2018).

Los 300 diputados de mayoría relativa se eligen en distritos electorales uninominales, territorios que son determinados atendiendo principalmente a criterios de población; es decir que depende del número de habitantes de cada estado de la República el número de distritos electorales —y por lo tanto de diputados— que le corresponden.

Al Instituto Nacional Electoral (INE) le corresponde definir los distritos electorales, con base en los datos de población del país. Así, los estados que cuentan con menor número son Baja California Sur, Campeche y Colima con dos diputados cada uno, mientras que Jalisco tiene 19, Veracruz 21 y el Estado de México 40 (datos de la LXIII legislatura 2015-2018; http://sitl.diputados.gob.mx/LXIII_leg/composicion_politicanp.php, fecha de consulta: 29 de enero de 2018).

Más pasos, misma distancia

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.

Contenido: Identifica situaciones de proporcionalidad directa e inversa, utilizando tablas de variación

Para arrancar

1. Dorotea prepara y vende bocadillos o canapés. Para un evento donde esperan a 20 invitados, le solicitaron 100 bocadillos. Luego le informan que el número de asistentes puede variar entre 15 y 30. ¿Cuántos bocadillos tendría que preparar, para atender al mínimo o al máximo de participantes, suponiendo el mismo número de bocadillos por persona?
   a) Comenten y comparen en el grupo y con su profesor, sus resultados y forma de obtenerlos.

Reto

1. Reúnete con dos compañeros y resuelvan lo siguiente.

e

En su rancho, la familia Rodríguez almacena agua, en nueve tambos de 200 litros cada uno, para usar en diversas tareas. Para aprovecharla mejor desean pasarla a tambos de otra capacidad.

a) Si los Rodríguez pasaran toda su agua a seis tambos iguales, ¿cuántos litros de capacidad debería tener cada uno de estos seis tambos?
b) Si quisieran almacenar su agua en 12 tambos, todos del mismo tamaño, ¿de cuántos litros tendría que ser cada uno?
c) En total, ¿cuántos litros de agua tienen almacenada los Rodríguez?

Expongan y comparen los diferentes procedimientos que surgieron al resolver este Reto, y coméntenlos con su profesor.

Se vale

Cuidado de otros seres vivos y de la naturaleza

El agua es indispensable para la vida, tanto para el ser humano como para plantas y animales. Por ello es cada vez más importante que hagamos un buen uso de este recurso.

Comenten en el grupo las medidas que conozcan y que se estén adoptando en su comunidad o colonia para mejorar el aprovechamiento del agua.

Pistas

1. En los mismos equipos del Reto, respondan las preguntas y hagan las sugerencias siguientes.
   - ¿Cuáles son las cantidades que hay en esta situación?
   - ¿Hay alguna cantidad que sea fija en todos los casos, es decir, que no estén cambiando sus valores?
   - ¿Cómo es la relación entre las cantidades?
   - Cuando una aumenta, ¿qué sucede con la otra?, ¿cómo cambia?
   - ¿Cuál es la cantidad cuyos valores se desean conocer?
   - Consideren elaborar una tabla para organizar los datos disponibles y por conocer.
   - Si tienen un dato de una cantidad, ¿cómo pueden hallar el valor correspondiente de la otra?

Relaciónalo

En primer grado y en la lección anterior, se estudiaron diferentes situaciones en las que hay dos conjuntos de cantidades que se relacionan entre sí. La relación es de proporcionalidad directa si al multiplicar un valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda también multiplicado por el mismo número. Además, al dividir los valores de una cantidad entre sus correspondientes de la otra, se observan razones equivalentes. Consulten los materiales respectivos si lo consideran necesario.

LECCIÓN 7

Para analizar

Un nuevo reto

e

1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica.

Los papás de Julio desean hacer algunos arreglos a su casa y necesitan contratar uno o varios albañiles para que realicen el trabajo necesario.

a) Completen la información con lo que los papás de Julio toman en cuenta para decidir cuántos albañiles van a contratar.
   - Un albañil puede levantar uno de los muros en 12 horas.
   - Si se contrata a dos albañiles, para que entre los dos hagan el trabajo, terminarán ese mismo muro en ____________ (ambos trabajan con la misma rapidez).
   - Si aumenta el número de personas que trabajan, podrán repartirse las tareas y concluir con el trabajo en ____________ (más/menos) tiempo.
   - Describan como es la relación entre los dos conjuntos de cantidades en este caso ____________

b) ¿Cuántos albañiles podrían contratar los padres de Julio? ____________

c) Elaboren una tabla en la cual se relacionen diferentes números de albañiles contratados, con los tiempos en que terminarían de levantar ese muro; comprueben los resultados que obtengan en su tabla.

d) Comparen las respuestas de los diferentes equipos y sus explicaciones de los procedimientos seguidos, y comenten con su profesor.

Formalización

En el problema del Reto se pueden identificar dos cantidades cuyos valores están variando: la capacidad en litros de los tambos, que deben ser todos iguales, y ____________

La cantidad de agua total con que cuentan los Rodríguez es fija, no cambia, sin importar en cuántos recipientes esté repartida. Esta cantidad es de ________ litros.

Observen los dos primeros conjuntos de cantidades: al disminuir el número de tambos para guardar el agua, ¿qué sucede con el tamaño de los tambos que se tendrían que usar? ____________

¿Tendrían que ser más grandes o más pequeños? ____________

¿Alcanzaría con tambos de 100 litros cada uno o deberían ser de 300 o más? Expliquen sus respuestas ____________

¿La relación entre estas dos cantidades (el número de tambos y su capacidad) es de proporcionalidad directa? Para averiguarlo, veamos lo siguiente:

- Si se multiplica el número de tambos por un factor (por ejemplo, 2), ¿la capacidad de los tambos también se multiplica (por 2), para poder guardar la misma cantidad de agua? ____________
- Si se usan tambos con la mitad de capacidad, es decir, de 100 litros cada uno, ¿el número de tambos aumenta o disminuye? ____________

El análisis anterior nos permite ver que la relación entre número de tambos y la capacidad de cada uno de ellos no es de proporcionalidad directa; es necesario encontrar algún otro procedimiento para resolver el problema.

El dato adicional que podemos utilizar es el total de agua almacenada que hay que traspasar a otros recipientes. Y lo que se desea conocer es uno o varios números de tambos más pequeños que los actuales, que sean más fáciles de manejar, pero en los cuales se pueda guardar la misma cantidad total de agua.

La cantidad de agua que tienen almacenada en el rancho y que desean cambiar de envases es:

$$(\textit{Capacidad de un tambo}) \times (\textit{Número de tambos}) = \textit{Total de agua por almacenar}$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_ \times \_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Como la cantidad de agua es la misma, si los Rodríguez optan por usar tambos de 100 litros, van a necesitar

$$\frac{\textit{total de agua por almacenar}}{100\ l} = \text{número de tambos de } 100\ l \text{ que se necesitarán}$$

Para organizar los resultados que se vayan obteniendo y poder comparar las diferentes opciones (usando tambos de distintos tamaños), para almacenar el agua de la familia Rodríguez, completen la **TABLA 7.1**.

Número de tambos	9	10	12	15	8	6	4
Capacidad de cada tambo (litros)	200						

TABLA 7.1 Número de tambos y capacidad de cada uno en litros.

Cuando dos conjuntos de cantidades se relacionan entre sí como en la situación anterior, se dice que son *inversamente proporcionales* o que están en *relación proporcional inversa* si:

- Siempre varían en dirección opuesta, es decir, que mientras los valores de una aumentan, los de la otra disminuyen y viceversa; cuando se multiplica un valor de una de ellas por un factor, el valor correspondiente de la otra cantidad se divide por el mismo factor.
- El producto de cada par de valores de uno y otro conjunto, permanece constante.

Cuando la relación es inversamente proporcional, para encontrar un valor desconocido de una de las cantidades, se divide el producto constante entre el valor correspondiente de la otra cantidad.

Recuerden que en las relaciones entre dos conjuntos de cantidades:

- Si la relación es de proporcionalidad inversa, al multiplicar cada par de valores correspondientes, se obtiene siempre el mismo producto; esta propiedad también es útil para comprobar operaciones y resultados.

Por ejemplo, si en el problema de los tambos de agua, se representa el número de tambos con la literal x, y la capacidad de cada tambo con la literal y, para cualquier par de valores se obtendrá el mismo producto, es decir que la expresión algebraica de la relación es

$$xy = \_\_\_\_\_\_ \text{ litros}$$

y en general, para cualquier relación entre dos cantidades inversamente proporcionales, su expresión algebraica será de la forma

$$xy = k$$

donde k es un valor constante que depende de cada situación específica.

- A su vez, si se trata de proporcionalidad directa, al dividir cada par de valores correspondientes se observan razones iguales.

  En general, para cualquier relación directamente proporcional entre dos variables, la expresión algebraica será de la forma:

$$\frac{y}{x} = k \quad \text{o} \quad y = kx$$

donde x, y y representan las cantidades directamente proporcionales, y k es su cociente constante, cuyo valor es fijo en cada situación en particular; por ejemplo, en la situación del inicio de la lección –los bocadillos de Dorotea– si

x = número de invitados
y = número de bocadillos

¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad en este caso? ______

Y la expresión algebraica de la relación entre esas dos cantidades es

$$\frac{y}{x} = \_\_\_\_\_\_$$

TIC

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el problema del trabajo en la casa de Julio, utilizando una hoja de cálculo o una calculadora. Para ello, elaboren una tabla como la siguiente.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3		Número de albañiles	Tiempo para terminar trabajo (horas)			
4		1	12.00			
5		2				
6		3				
7		4				
8		5				
9		6				
10		7				
11		8				
12		9				
13		10				
14		11				
15		12				
16						
17						
18						
19						
20						

FIGURA 7.1 Tabla en la que se relacionan el número de albañiles y el tiempo en horas para terminar el trabajo.

a) Completen la tabla introduciendo las fórmulas necesarias. Contesten las siguientes preguntas.
- ¿Qué permanece constante y qué va cambiando en las fórmulas de la tabla, a medida que cambia el número de trabajadores que intervienen?
- ¿Cómo se relaciona lo anterior con las propiedades de una relación inversamente proporcional?
- ¿Cuál es el procedimiento para comprobar los resultados de cada renglón?

b) Comenten entre parejas, en el grupo y con su profesor sus resultados.

¡A practicar!

1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica.

a) Alicia ha notado que cuando sale a pasear con sus amigos Rubén y Ricardo, ellos avanzan más rápido que ella. Para averiguar qué sucede, Alicia pide a sus amigos que le ayuden a recoger algunos datos. Primero, mide la longitud del paso de cada uno de sus amigos y el de ella misma. Después, cuenta el número de pasos que les toma a los tres recorrer la misma distancia. Obtuvo los datos que aparecen en la TABLA 7.2.

	Rubén	Ricardo	Alicia
Largo del paso (cm)	79.2	72	66
Número de pasos	10	11	¿?

TABLA 7.2 Número de pasos y longitud en centimetros de Rubén, Ricardo y Alicia.

- Describan cómo se relacionan las cantidades anteriores, ¿la relación entre ellas es directa o inversa? ____
- Expliquen.
- ¿Cuántos pasos necesitó para caminar la misma distancia que sus compañeros? ____
- ¿Consideran que Alicia dará más pasos que Ricardo o menos? ¿Por qué? ____
- ¿Cuál es la distancia recorrida por cada uno de ellos? ____

b) En el mercado de San Juan contratan cargadores para llevar la mercancía de los camiones a los puestos del mercado. Un cargador se tarda tres horas en bajar toda la mercancía de un camión.

- ¿Cuánto tiempo se tardarían tres o cinco personas en llevar a cabo la misma tarea? ____

c) Para ir de excursión, el grupo de Vanessa contrató un autobús por un precio fijo. El precio que cada alumno debe pagar, depende de la cantidad de alumnos que vayan a la excursión, como se muestra en la siguiente tabla.

Cantidad de alumnos	5	10	20	30	40
Precio por alumno	1500	750	375	250	187.50

- ¿Cuánto cuesta rentar el autobús? ____
  Expliquen su respuesta.
- Si van 35 alumnos a la excursión, ¿cuánto pagará cada uno por el autobús?

2. En las siguientes situaciones, trabaja con un compañero e identifiquen las variables o conjuntos de cantidades que varían, descríbanlas y determinen si su relación es de proporcionalidad directa o inversa. Expliquen a otra pareja sus conclusiones y los pasos que siguieron.

a) Hilario es el gerente del supermercado "La Pura Verdura". Hay ocho cajas de cobro, pero no están abiertas todo el tiempo. El número de cajeros que atiende al público depende de los clientes que se espera recibir, y esto varía según el día de la semana y la hora del día.

Por ejemplo, los martes entre 10 y 11 de la mañana, dos cajeros atienden adecuadamente a los 60 clientes que en promedio se presentan. Pero los jueves por la tarde llegan 150 clientes por hora y los sábados por la tarde son 210 en promedio cada hora. ¿Cuántas cajas deberá poner en operación Hilario los jueves y los sábados por la tarde? ____

b) En su clase de Español Gabino tiene que leer varios libros. Va a empezar un libro de 360 páginas, y quiere saber en cuánto tiempo lo leería si lo hace al mismo ritmo que el anterior, el cual era de 280 páginas y le tomó siete días terminarlo. Los libros son del mismo diseño, tienen la misma cantidad de texto por página. ____

Portafolio de evidencias

Incluye para tu portafolio de evidencias la solución al Reto, así como un problema resuelto en que identifiques una relación inversamente proporcional entre dos conjuntos de cantidades.

c) En clase de Español, Lidia tiene el siguiente problema. Hay que leer un libro de 390 páginas y terminarlo en 10 días. Pero ella acostumbra leer a un ritmo de 30 páginas por día. ¿Le alcanzará el tiempo? ¿Que tendrá que hacer para cumplir con su tarea? ____________________

Para terminar

1. Escribe en tu cuaderno qué conocimientos y habilidades adquiriste al trabajar esta lección, y qué otros recordaste (acerca de las relaciones inversamente proporcionales entre dos conjuntos de cantidades, y también sobre relaciones de proporcionalidad directa). Además registra cualquier duda que te haya quedado y coméntala con tu profesor.

2. Reúnete con un compañero y completen las siguientes tablas e indiquen, en cada caso, si los valores son directamente proporcionales, inversamente proporcionales o no guardan relación de proporcionalidad. Luego, inventen un problema que se resuelva relacionando los datos de algunas de las tablas.

X	2	3	4	5		10
Y	30	20	15		10	

P	3		9	15	21	
Q	2		8	14		24

A	0	3	7	8		12
B	0	9	21		30	36

Para leer

La proporcionalidad en la ciencia

En física estudiarás que cuando se aplica una fuerza a un cuerpo, éste se desplaza con movimiento acelerado. La magnitud de la aceleración que recibe el cuerpo depende o es función de la fuerza que se le aplique.

Estos fenómenos se describen en física basándose en la Segunda Ley de Newton:

> *La aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él, e inversamente proporcional a su masa.*

(http://www.dgb.sep.gob.mx/servicios-educativos/telebachillerato/LIBROS/3-semestre-2016/Fisica-I.pdf; fecha de consulta: 20 de febrero de 2018).

Las tres leyes de Newton permiten explicar los problemas de la mecánica así como el movimiento de los astros; es decir que sirven tanto para describir el desplazamiento de un automóvil, como para comprender por qué la Luna gira en torno a la Tierra.

Modelos gráficos

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Contenido: Sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Método gráfico y método de reducción por suma o resta

Para arrancar

1. Resuelve el siguiente problema.

¿Qué figura se obtiene al ubicar en el plano cartesiano de la **FIGURA 8.1** los puntos: A (4, 4), B (0, 8), M (3, 2), N (−4, −5) y después unir los puntos A con B y M con N?

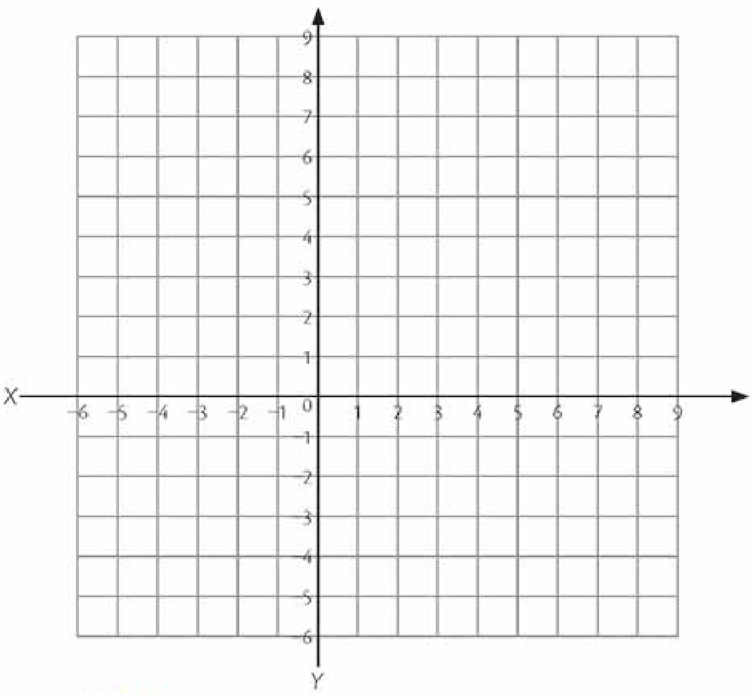


FIGURA 8.1 Plano cartesiano.

2. Compara tu plano con el de otro compañero y hagan lo que se indica.

a) Respondan.

- ¿Sus planos coinciden?
- ¿Qué figura se obtiene al unir dos puntos?

b) Una vez que estén de acuerdo con sus gráficas, sigan lo que se indica.

- Si se prolonga la recta AB, ¿pasa por el punto (7, 2)? ____________________
- Al prolongar la recta MN, ¿pasará por el punto (6, 5)? ____________________
- Escriban las coordenadas de dos puntos (diferentes de A, B, M y N) que están sobre cada una de las rectas y ubíquenlos en el plano cartesiano. ______________
- Prolonguen las líneas hasta que se corten y escriban las coordenadas del punto.

  ____
- ¿A cuál de las dos rectas pertenece el punto donde se cortan? ______________
- ¿Por qué? ____

c) Con la coordinación del profesor, compartan su trabajo con los compañeros de grupo y analicen sus respuestas.

LECCIÓN 8

Reto

1. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.
   a) Resuelvan el siguiente problema.

Marcela tiene ahorrados \$150 y piensa ahorrar \$10 cada semana. Sofía tiene ahorrados \$100 y se propone ahorrar \$15 cada semana, ¿en cuántas semanas Marcela y Sofía habrán ahorrado la misma cantidad?

   b) Comparen su respuesta con las de otra pareja.
      - En caso de que no coincidan, argumenten porqué consideran que la respuesta de ustedes es la correcta.
   c) Una vez que todos estén de acuerdo con la respuesta correcta, juntos realicen lo siguiente:
      - Sistematicen la información:

Semana	Marcela	Sofía
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		

TABLA 8.1 Cantidad de dinero ahorrado por Marcela y Sofía por semanas transcurridas.

      - Representen la información en el siguiente plano cartesiano.

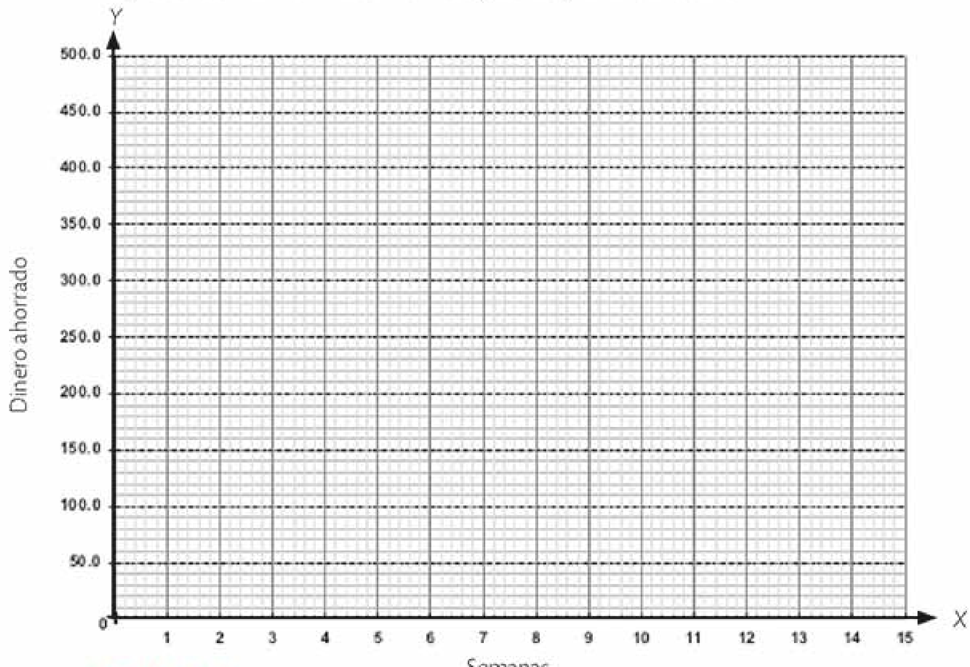


FIGURA 8.2

d) Analicen la gráfica del inciso anterior y respondan.
- Si Marcela ha ahorrado \$230, ¿cuántas semanas han transcurrido? ______
- ¿Cuántas semanas han pasado si Sofía tiene ahorrado \$205? ______
- ¿Qué información representa el punto donde se cruzan las gráficas?

______

e) Escriban una expresión algebraica que les permita obtener la cantidad de dinero *y* que tendrá ahorrado Marcela en cualquier número de semanas. Utilicen *x* para expresar el número de semanas. ______

f) Escriban una expresión algebraica para obtener la cantidad de dinero *y* que Sofía habrá ahorrado en cualquier número de semanas. Utilicen *x* para expresar el número de semanas. ______

g) Escriban una expresión algebraica que muestre la igualdad entre las cantidades ahorradas por Marcela y Sofía. ______

h) Resuelvan esta ecuación por el método de igualación y verifiquen si el valor de *x* representa el número de semanas en las que Marcela y Sofía tendrán la misma cantidad de dinero. ______

i) Escriban una conclusión al respecto y, socialícenla con el grupo y entre todos lleguen a una sola conclusión.

Pistas

1. En las mismas parejas del Reto respondan las siguientes preguntas. p
- ¿Cuánto dinero ahorrado tendrá en total Marcela transcurrida una semana?

  ______
- ¿Cuánto dinero ahorrado tendrá en total Sofía en la segunda semana?

  ______
- ¿Quién de las dos tendrá más dinero ahorrado a la quinta semana?

  ______

Para analizar

Un nuevo reto

1. Forma un equipo con dos compañeros para que analicen y resuelvan el siguiente problema. e

Una compañía de alquiler de automóviles ofrece dos planes:
Plan A: Una cuota fija de \$200, más \$22.50 por cada kilómetro recorrido.
Plan B: Una cuota fija de \$400, más \$18.50 por cada kilómetro recorrido.
¿Para qué número de kilómetros se pagaría lo mismo en ambos planes? ______

a) Realicen una exposición ante todos sus compañeros en la que expliquen cómo fue que resolvieron el problema. g

- Argumenten su respuesta mostrando el sistema de ecuaciones que hayan establecido, la tabla de valores y una gráfica que modela la relación de los datos del problema.
- ¿Qué plan conviene escoger si desea alquilar un automóvil para hacer un recorrido aproximado de 140 kilómetros?

Formalización

g **1.** Entre todo el grupo realicen una lectura comentada del siguiente texto.

En primer grado de secundaria aprendiste que bastan dos puntos para determinar una recta y que todos los puntos por los que pasa la recta son parte de ella.

También recordarás que cualquier punto está formado por las coordenadas (x, y), es decir, que cuando se dan las coordenadas de un punto, el primer valor se busca en el eje horizontal llamado *eje de las "equis"* por ser la letra X la que lo identifica, o bien, *eje de las abscisas*. El segundo valor corresponde al eje vertical llamado *eje de las "yes"* porque la letra Y lo identifica, o también, *eje de las ordenadas*.

Cuando se tiene un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (x, y) se pueden dar valores arbitrarios a x para calcular el valor de y en cada una de ellas. Es decir, que el valor de y estará en función de los valores que se den a x.

Por ejemplo, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

1) $2x + y = 5$
2) $-x + 3y = 8$

Es necesario despejar y en ambas ecuaciones, dar valores a x y hacer las operaciones para encontrar el valor de y. Comúnmente se elabora una tabla con los valores, a esto se le conoce como *tabular*.

1) $y = 5 - x$

x	y	Ecuación 1
0	5	$y = 5 - 2\,(0)$
1	3	$y = 5 - 2\,(1)$
2	1	$y = 5 - 2\,(2)$

TABLA 8.2 Valores que toma y, cuando a x se le asignan valores arbitrarios en la ecuación 1.

2) $y = \frac{8 + x}{3}$

x	y	Ecuación 2
1	3	$y = \frac{8 + 1}{3}$
4	4	$y = \frac{8 + 4}{3}$
7	5	$y = \frac{8 + 7}{3}$

TABLA 8.3 Valores que toma y, cuando a x se le asignan valores arbitrarios en la ecuación 2.

De esta forma se obtienen parejas (x, y) para cada ecuación. Se localizan estos puntos en el plano cartesiano y se trazan las rectas correspondientes.

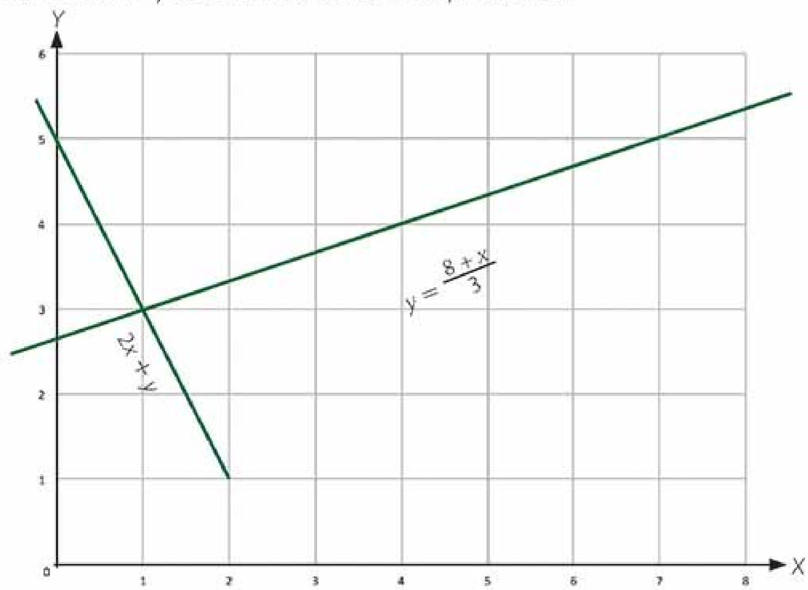


FIGURA 8.3 Gráfica de la relación entre las variables x y y establecida por las ecuaciones 1 y 2.

Como puedes ver, las rectas se cortan en un punto: (1, 3); esto es, ambas rectas pasan por ese punto, dicho de otra forma, el punto (1, 3) es común a ambas rectas.

En términos de las ecuaciones, esto se interpreta como la solución del sistema.

Es decir, $x = 1; y = 3$

a) De acuerdo con lo anterior, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos determinados en la ecuación 1? ¿Y los de la ecuación 2?

b) Ubica los puntos en el plano cartesiano y verifica que corresponden a las rectas dibujadas en la **FIGURA 8.3**.

Cuando en la representación gráfica de dos rectas en el plano, éstas se cortan en un punto, se dice que es un sistema compatible; es decir, que tiene una solución, que es precisamente el punto donde se intersecan ambas rectas.

Para saber que estos valores son correctos, se hace la comprobación correspondiente.

1) $2x + y = 5 \rightarrow 2(1) + 3 = 5 \rightarrow 2 + 3 = 5$

2) $-x + 3y = 8 \rightarrow -1 + 3(3) = 8 \rightarrow -1 + 9 = 8$

Ahora analicemos la gráfica de las siguientes ecuaciones:

$-2x + y = 1$
$-2x + y = 3$

Despejamos y en cada una de las ecuaciones y damos valores a x.
1) $y = 2x + 1$
2) $y = 2x + 3$

x	y	Ecuación 1
-2	-3	$y = 2(-2) + 1$
-1	-1	$y = 2(-1) + 1$
0	1	$y = 2(0) + 1$
1	3	$y = 2(1) + 1$
2	5	$y = 2(2) + 1$

TABLA 8.4 Tabulación de la ecuación 1.

x	y	Ecuación 2
-2	-1	$y = 2(-2) + 3$
-1	1	$y = 2(-1) + 3$
0	3	$y = 2(0) + 3$
1	5	$y = 2(1) + 3$
2	7	$y = 2(2) + 3$

TABLA 8.5 Tabulación de la ecuación 2.

Hagamos la gráfica correspondiente.

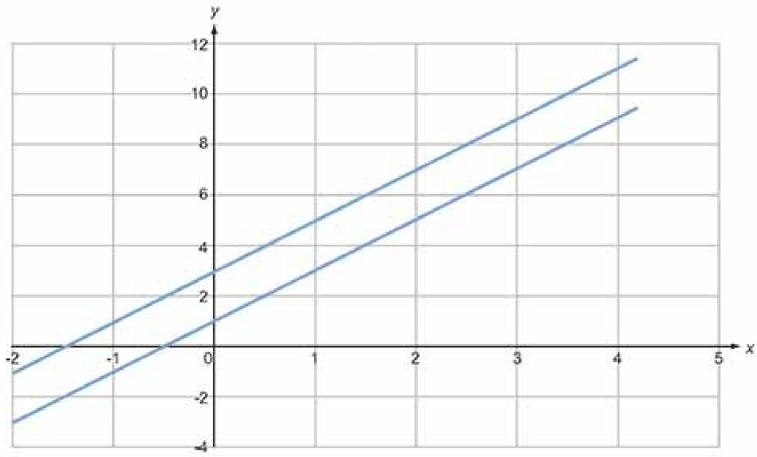


FIGURA 8.4 Gráfica de las ecuaciones 1 y 2.

En este caso se puede observar que se obtienen dos rectas paralelas, esto es, aunque se continúe calculando valores para x y para y en ambas ecuaciones, las rectas nunca se cortarán. Por lo tanto, las dos ecuaciones que originan esta gráfica no tienen una solución, es decir, no forman un sistema de ecuaciones.

Cuando en un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, las rectas resultantes son paralelas, con diferente ordenada al origen, se dice que es un *sistema incompatible*; es decir, que no tiene solución.

También puede ocurrir que la representación gráfica de dos rectas en el plano es la misma recta, cuando esto ocurre, se dice que es un *sistema indeterminado*; es decir, que tiene un número infinito de soluciones, porque cualquier punto de la gráfica es solución del sistema.

Cuando se tiene un sistema de ecuaciones donde el coeficiente de una de las incógnitas es el mismo en ambas ecuaciones, se puede resolver de la siguiente manera:

Ejemplo:

$$2x + 3y = 22$$
$$4x - 3y = 8$$

Observa que el coeficiente (3) de y en ambas ecuaciones es el mismo; por lo que cuando se tiene un sistema de este tipo, la idea es eliminar cualquiera de las dos incógnitas ya sea sumando o restando. En el ejemplo, lo que conviene hacer es sumar las dos ecuaciones ya que con ello se elimina la incógnita y y se determina el valor de la incógnita x. Es decir:

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = 22 \\ \underline{4x - 3y = 8} \\ 6x = 30 \\ x = 5 \end{array}$$

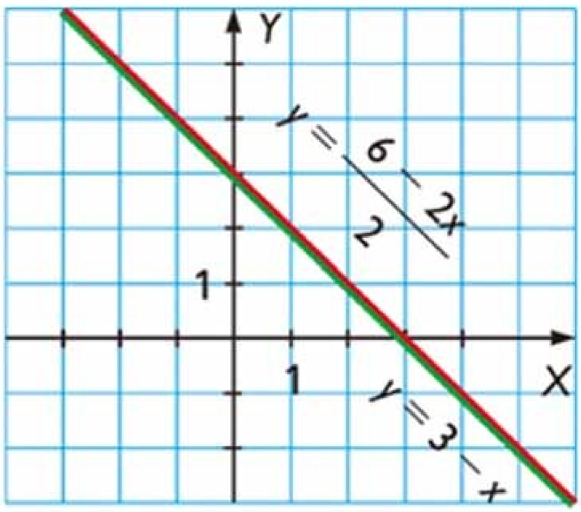


FIGURA 8.5 Representación gráfica de un sistema indeterminado.

Una vez determinado el valor de x, se determina el valor de y sustituyendo el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones originales.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 22 \\ 2(5) + 3y &= 22 \\ 10 + 3y &= 22 \\ y &= 4 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 4(5) - 3y &= 8 \\ 20 - 3y &= 8 \\ -3y &= -12 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Al procedimiento anterior se le llama *método de reducción por suma o resta*.

¡A practicar!

1. Plantea un sistema de ecuaciones, y resuélvelo por el método gráfico o por el método de reducción de suma o resta, para cada unos de los siguientes problemas. Registra tus procedimientos.

a) Para una función de teatro para niños, el boleto para adultos cuesta \$70 y el boleto para niños \$35. Anoche entraron en total 80 personas y se recaudaron \$2 850. ¿Cuántos adultos y cuántos niños entraron?

b) Rosa María se compró dos CD de distinto precio, uno vale dos pesos más que el otro, si en total gastó \$52, ¿cuánto costó cada uno?

c) En un país centroamericano, la empresa de gas para consumo familiar cobra un cargo fijo de \$25, más \$1.20 por metro cúbico. Los legisladores deciden que a partir del próximo año se cobrará un gasto fijo de \$85 en cada casa de familia. Algunos ciudadanos están felices, mientras que a otros no les agradó el cambio. ¿Cuál será el consumo familiar para que no les convenga el cambio en la tarifa?

d) En una empresa de turismo hay autobuses con 48 asientos y *minivan* para 12 pasajeros. En el fin de semana largo se usaron las 8 unidades disponibles, transportando en total 204 pasajeros. ¿Cuántos autobuses y *minivan* tienen?

2. ¿Cuál o cuáles de los gráficos que se proponen puede corresponder al siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 4x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

a)

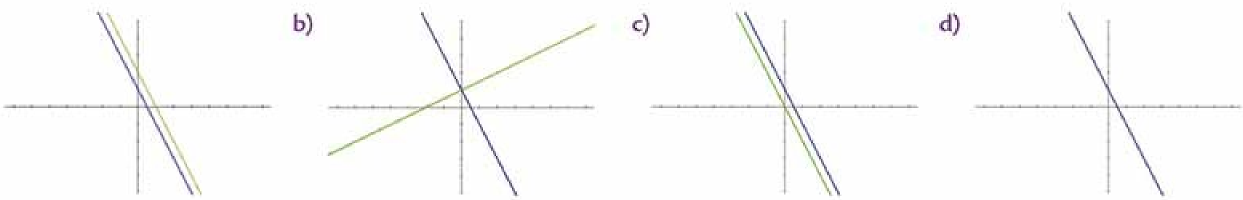


FIGURA 9.6 Representaciones gráficas de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método gráfico.

a) $\begin{cases} x + 4y = 3 \\ 6x - 5y = -11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2y + 2 = -3x \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

Portafolio de evidencias

Elige para tu portafolio de evidencias la resolución del problema planteado en Un nuevo reto y el que a un problema que te guste que aparece en la sección ¡A practicar!

Reúnete con un compañer(a) y comparen sus respuestas. Discutan cómo fue que resolvieron cada uno de ellos . En caso de alguna duda, consulten a su docente.

Para terminar

1. Regresa al problema cuya gráfica fueron dos rectas paralelas y anota cuál es la pendiente de cada una de las rectas. ______________
   a) Escribe de qué manera esto te ayuda a determinar si las rectas se cortarán o no.
   ____
   ____
   b) Revisa tus respuestas a los problemas iniciales, y si consideras que debes corregir o puntualizar algo, hazlo. Si aún tienes dudas, solicita apoyo a tu profesor o profesora.

TIC

1. En una hoja cálculo introduce los valores que tabulaste y obtén fácilmente la gráfica de tus dos ecuaciones.
   a) Deberás dejar un espacio en blanco entre los valores de la primera ecuación y los de la segunda.
   b) Después, selecciona todos los valores como se observa en la FIGURA 9.5.

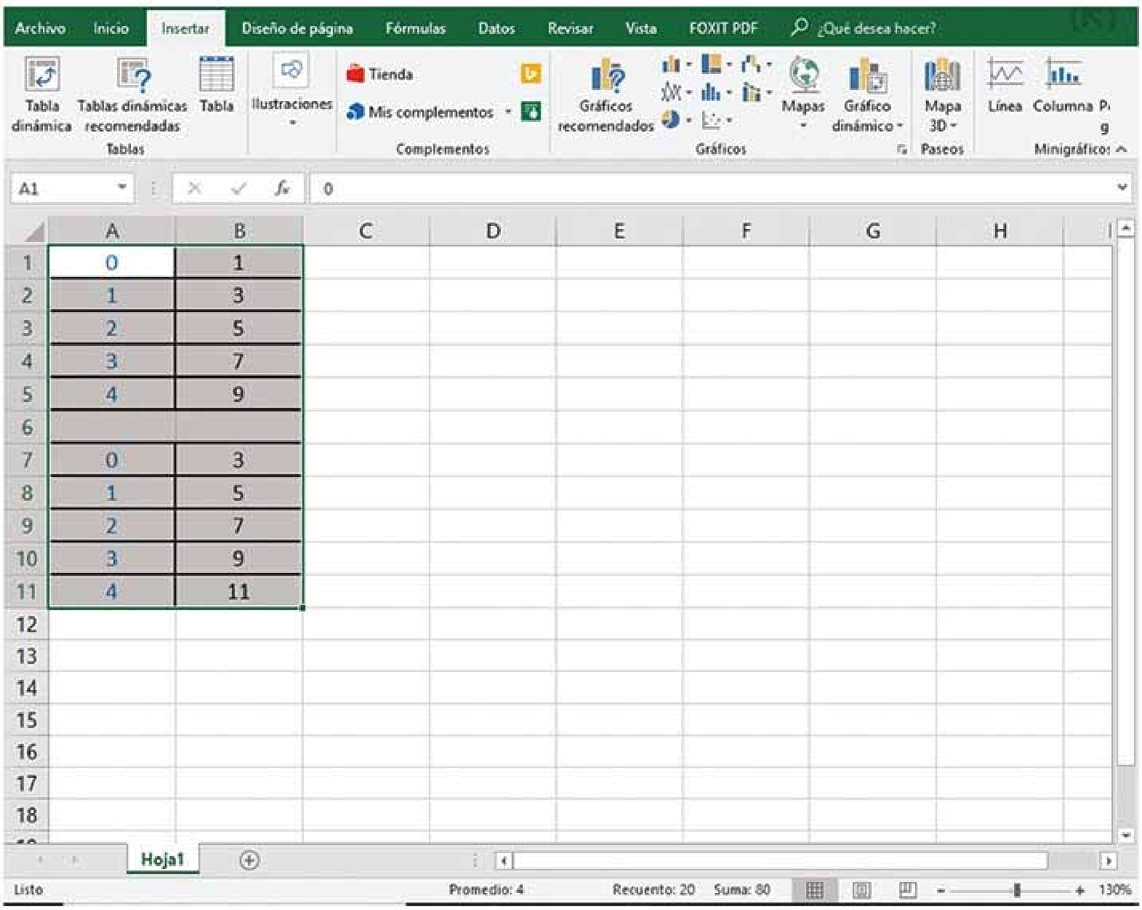


FIGURA 8.7 Tabulación de una ecuación.

c) Una vez sombreados te vas a donde dice *Insertar*, donde aparece la opción gráficos, y en ella da clic sobre una gráfica de línea.

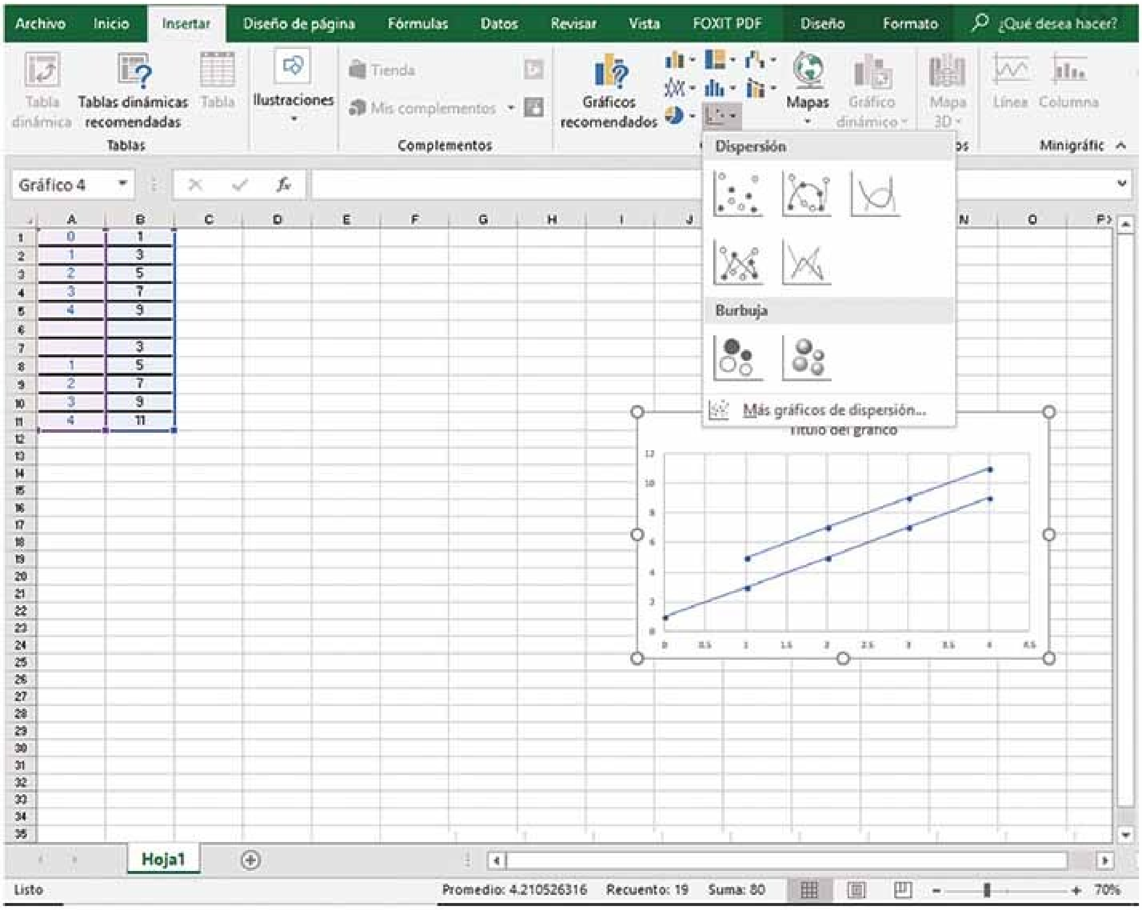


FIGURA 8.8 Gráfica de la tabulación de una ecuación en una hoja de cálculo.

Para jugar

Batalla naval

Batalla naval es un juego de mesa que se juega entre dos personas y que consiste en posicionar unos barcos en un tablero y tratar de adivinar la posición de los barcos del contrincante. El tablero donde se colocan los barcos es similar a un plano cartesiano, y tú puedes dar las posiciones de los barcos a través de sus coordenadas.

Puedes encontrar en internet versiones gratis de este juego.

Juega con tus compañeros y ubiquen las posiciones de sus barcos con coordenadas cartesianas.

Cuestiones de balanceo

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Contenido: Contenido: Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Método de igualación y sustitución

Para arrancar

1. De manera individual, resuelve el siguiente problema.

La siguiente balanza está en equilibrio y modela la resolución de una ecuación lineal, es decir, de primer grado, porque la incógnita tiene exponente 1.

¿Cuál es la ecuación lineal que representa cada proceso de resolución y cuál es el valor de la incógnita?

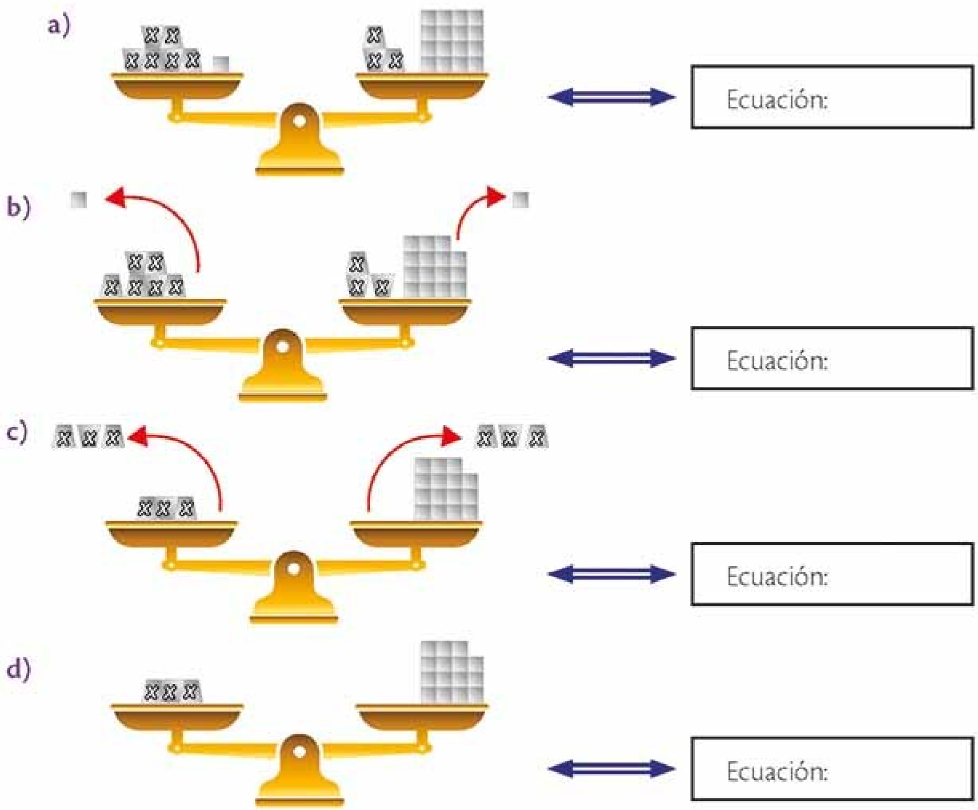


FIGURA 9.1 Representación gráfica de diferentes ecuaciones.

e

2. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica.

a) Comparen sus respuestas y, en caso de que no coincidan sus ecuaciones, argumenten sus respuestas con la idea de que se den cuenta si cometieron algún error.

b) Una vez que entre todos estén de acuerdo de cuál es la respuesta correcta en cada paso de resolución, resuelvan la siguiente ecuación aplicando las propiedades de la igualdad.

$$3x + 10 = 5x + 6$$

La propiedad para la suma nos dice en palabras que, al sumar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtenemos una nueva igualdad válida.

La propiedad para la resta nos dice que, al restar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtenemos otra igualdad válida.

La propiedad para la multiplicación nos dice en palabras que, si multiplicamos ambos lados de la igualdad por un número real, obtenemos otra nueva igualdad válida.

La propiedad para la división nos dice que si dividimos ambos lados de la igualdad por un número real (distinto de cero), obtenemos otra nueva igualdad válida.

Reto

3. Organizados en parejas resuelvan el siguiente problema.

Irene y Camila fueron a comprar material para el inicio de clases. Las dos decidieron comprar lápices y cuadernos iguales, Irene compró 2 lápices y 6 cuadernos y pagó $130, en tanto que Camila compró 4 lápices y 3 cuadernos y pagó $80.

¿Cuánto cuesta el tipo de lápiz y el tipo de cuaderno que escogieron Irene y Camila?

FIGURA 9.2 Precio de los lápices y cuadernos seleccionados por Irene y Camila.

Comparen sus respuestas y su forma de resolución del problema con las de otras parejas de compañeros. En caso de que no coincidan las respuestas, revisen sus operaciones. Luego, respondan las siguientes preguntas:

a) Si se representa con x el precio de un lápiz y con y el precio de un cuaderno, ¿cuál es la ecuación que representa lo que compró Irene y cuál es la que representa lo que compró Camila?

b) ¿Cuántas incógnitas tiene cada ecuación?

c) ¿Cómo se puede resolver estas dos ecuaciones?

Pistas

1. En las mismas parejas del Reto respondan las siguientes preguntas.

- ¿Cuántas incógnitas (datos desconocidos) se tienen en esta situación?
- ¿Cómo expresan la relación entre la cantidad de lápices y cuadernos y lo que paga Irene?
- ¿Cómo expresan la relación entre la cantidad de lápices y cuadernos y lo que paga Camila?
- ¿Qué relación hay entre la compra de Irene y Camila?

Comparen sus respuestas con las de otra pareja. Si hay diferencias, analicen lo que hicieron y lleguen a un acuerdo.

2. Reúnete con otros dos compañeros y hagan lo que se indica.

a) Lean y analicen el diálogo que se dio en el equipo de Rosa, José y Andrés.

- Rosa: Lo que entiendo del problema es que los dos compraron el mismo tipo de lápiz y también del cuaderno.
- Andrés: ¿Entonces quiere decir que lo que compraron es de dos opciones?
- Rosa: Sí, en el caso de los lápices fue de \$5 o de \$6.
- José: Lo que se trata entonces es averiguar cuál es el precio de cada artículo.
- Andrés: Pues es muy fácil, sólo se trata de dos precios de cada artículo.
- Rosa: Miren, si representamos como "equis" el precio de un lápiz, y como "ye" el precio de un cuaderno, entonces podemos plantear una ecuación para lo que compró Irene, y otra ecuación para lo que compró Camila.
- Andrés: Ya sé cómo, para el caso de Irene es: $2x + 6y = 130$.
- José: Y para el caso de Camila es: $4x + 3y = 80$.
- Rosa: Me parece muy bien, pero, ¿cómo se resuelven estas ecuaciones con dos incógnitas?
- Andrés: Pues es muy fácil, "equis" sólo tiene dos valores, y "ye" también.
- José: Ya sé cómo, miren lo que hago.
- Rosa: A ver, muéstranos cómo las resuelves.

b) De acuerdo con la discusión del equipo de Rosa, Juan y Andrés, en el contexto del problema, ¿qué significa cada una de las siguientes ecuaciones?

- $2x + 6y = 130$ Significado: ______________________________
____
- $4x + 3y = 80$ Significado: ______________________________
____

c) ¿Cuál es el valor de x, y cuál es el de y?

d) ¿Cuánto cuesta el tipo de lápiz y el tipo de cuaderno que escogieron Irene y Camila?

e) Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen los procedimientos que siguieron para resolver el problema.

- Si plantearon alguna ecuación, comenten cómo fue que la resolvieron para dar respuesta al problema.
- Si no lo hicieron, muestren cuáles fueron sus operaciones y cómo fue que llegaron a la respuesta correcta.
- Si tienen dudas, plantéenlas a su profesor(a), y juntos traten de aclararlas.

Para analizar

Un nuevo reto

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 80 m y que su base es el triple de su altura?

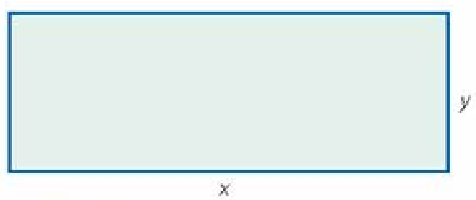


FIGURA 9.3 Rectángulo.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa su perímetro? ______________

b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa la relación "base igual al triple de la altura"? ____________________

c) Sustituyan esta equivalencia en la ecuación que relaciona el perímetro y resuélvanla aplicando las propiedades de la igualdad para encontrar una de las incógnitas.

d) Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen sus procedimientos y respuestas.

- En caso de que no coincidan, expliquen qué fue lo que hicieron para resolver la ecuación que establecieron.
- Verifiquen que las respuestas resulven el problema, es decir, al sustituir en la fórmula $p = 2x + 2y$, resulta 80.

e) Respondan las siguientes preguntas: En el contexto del problema, ¿qué representa $p = 2x + 2y = 80$? ¿Qué representa $x = 3y$?

2. En las mismas parejas del Un nuevo reto analicen el procedimiento mostrado y describan lo que se hizo en cada paso.

Procedimiento	Descripción de lo que se hizo algebraicamente
Base: x	____________________
Altura: y	____________________
$x = 3y$	____________________
$2x + 2y = 80$	____________________
$2(3y) + 2y = 80$	____________________
$6y + 2y = 80$	____________________
$8y = 80$	____________________
$y = \frac{80}{8}$	____________________
$y = 10$	____________________

Formalización

1. En grupo lean el siguiente texto, analicen la situación que se presenta y la forma de darle respuesta.

En el curso anterior resolviste problemas que originaban una ecuación de primer grado con una incógnita y utilizaste diversas estrategias o métodos de solución. Ahora te enfrentas a problemas que generan dos ecuaciones con dos incógnitas que están estrechamente relacionadas. A estas ecuaciones se les conoce como *sistema de dos ecuaciones lineales o de primer grado con dos incógnitas.*

Analiza el siguiente problema y la forma en que se solucionó, conocida como *método de sustitución.*

a) Problema: El triple de un número más el doble de otro es igual a 34, y el doble del primero menos el segundo es 11. ¿Cuáles son esos números?

Como puedes observar, el problema tiene dos incógnitas, es decir, se trata de buscar dos números que cumplan las condiciones dadas; además, se puede observar que estos números deben cumplir también dos condiciones, así que el problema da origen a dos ecuaciones. Por tanto, primero habrá que establecer las ecuaciones:

Ecuación 1: $3x + 2y = 34$

Ecuación 2: $2x - y = 11$

Dado que las ecuaciones con una incógnita ya las sabes resolver, una estrategia es buscar que cualquiera de las anteriores se quede sólo con una incógnita. Tomemos la ecuación 2 y despejemos cualquiera de las incógnitas:

$$2x - y = 11 \quad \rightarrow \quad -y = 11 - 2x$$

Al despejar y observamos que quedó con signo negativo, por lo que podemos multiplicar *toda la ecuación por −1* para no alterar los valores y cambiar el signo negativo de y a positivo.

$$-1\,(-y) = -1\,(11 - 2x) \quad \rightarrow \quad y = -11 + 2x$$

Ahora que se tiene una de las incógnitas expresada en función de la otra, podemos sustituirla en cualquiera de las dos ecuaciones:

Tomemos la 1, y al sustituir y queda: $3x + 2\,(-11 + 2x) = 34$, ecuación que sólo tiene una incógnita (x).

Hagamos lo necesario para resolver esta ecuación:

$$3x - 22 + 4x = 34 \quad \rightarrow \quad 7x = 56 \quad \rightarrow \quad x = \frac{56}{7} \quad \rightarrow \quad x = 8$$

El valor de x se sustituye en cualquiera de las dos ecuaciones y se calcula el valor de y.

$$3(8) + 2y = 34 \quad \rightarrow \quad 24 + 2y = 34 \quad \rightarrow \quad y = \frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad y = 5$$

Es importante verificar que los valores obtenidos son correctos.

$$3x + 2y = 34 \quad \rightarrow \quad 3(8) + 2(5) = 34 \quad \rightarrow \quad 34 = 34$$
$$2x - y = 11 \quad \rightarrow \quad 2(8) - 5 = 11 \quad \rightarrow \quad 11 = 11$$

De acuerdo con lo anterior, en términos generales, ¿en qué consiste resolver un sistema de dos ecuaciones por el método de sustitución?

¿Cómo resolverías por el método de sustitución el siguiente sistema de ecuaciones?

$$2x + y = 20$$
$$2x = y$$

¿Cuáles son los valores de x y y?

b) Problema: En una tienda que iba a liquidar su mercancía pusieron una mesa con remate de libros y discos de música. Efraín pagó \$430 por 7 libros y 4 discos; Dolores también pagó \$430, pero ella compró 5 libros y 9 discos. ¿Cuál era el precio de los libros y de los discos?

En este caso, el precio de los discos y de los libros es el mismo, por lo que las expresiones que relacionan las compras que hicieron Efraín y Dolores son:

$$7x + 4y = 430$$
$$5x + 9y = 430$$

Otra forma de resolver esta situación, además de la que ya conociste antes, es con el *método de igualación.*

Con este método se despeja una misma incógnita de ambas ecuaciones.

$$y = \frac{430 - 7x}{4}$$

$$y = \frac{430 - 5x}{9}$$

Como las dos expresiones son iguales a y, se pueden igualar. De esta forma se obtuvo una expresión con una incógnita solamente.

$$\frac{430 - 7x}{4} = \frac{430 - 5x}{9} \rightarrow 9\left(\frac{430 - 7x}{4}\right) = 430 - 5x \rightarrow \frac{3\,870 - 63x}{4} = 430 - 5x$$

$$3\,870 - 63x = 4(430 - 5x) \rightarrow 3\,870 - 63x = 1\,720 - 20x \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\,870 - 1\,720 = -20x + 63x \rightarrow 2\,150 = 43x \rightarrow x = \frac{2\,150}{43} \rightarrow x = 50$$

Se sustituye este valor en cualquiera de las dos ecuaciones iniciales y se calcula el valor de la incógnita que aún queda.

$$5x + 9y = 430 \rightarrow x = \frac{430 - 5(50)}{9} \rightarrow x = \frac{430 - 250)}{9} \quad x = 20$$

Entonces el costo de los libros en ese remate era de \$50, y el de los discos era \$20.

Lo cual se comprueba si se sustituyen los valores obtenidos en las ecuaciones iniciales.

$$7x + 4y = 430 \rightarrow 7(50) + 4(20) = 430$$

$$5x + 9y = 430 \rightarrow 5(50) + 9(20) = 430$$

c) Platiquen acerca de cuál de estos dos métodos les parece más accesible para resolver un **sistema de ecuaciones**.

Relaciónalo

En el curso anterior estudiaste cómo encontrar el valor de la incógnita en una ecuación de primer grado. Ya sea que hayas recurrido a la estrategia de la balanza o a pasar los términos de un lado de la igualdad al otro mediante la operación contraria.

Si no lo recuerdas, revisa tus apuntes de primer grado acerca de cómo resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.

¡A practicar!

1. Reúnete con un compañero para resolver el problema de las entradas al teatro aplicando cualquiera de los dos métodos que conocieron y revisen si los valores obtenidos antes y con este método son los mismos, después comprueben si son correctos.

2. En las mismas parejas de la actividad anterior hagan lo siguiente.
   - **a)** Resuelvan el primer sistema seleccionando cada uno un método distinto.
   - **b)** Para resolver el segundo sistema intercambien los métodos de solución que utilizaron antes.

- $-4x + 5y = -23$
  $2x - 3y = 13$
- $3x - 2y = -4$
  $5x + 6y = 19$

c) Comparen los resultados obtenidos, y si hay desacuerdos, analicen a qué se debieron.

d) Lean detenidamente lo siguiente:

Cuando dos ecuaciones tienen una misma solución, se dice que forman un sistema de ecuaciones.

Si las dos ecuaciones tienen dos incógnitas, se les conoce como: sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas o sistema de ecuaciones 2×2.

Para terminar

1. Resuelve los siguientes problemas.

a) Un grupo de jóvenes actores de una escuela venden boletos para una función para niños. Los boletos de niños cuestan \$15, y los boletos para adultos cuestan \$25. Después de la primera función, los actores estuvieron contentos porque su teatro casi se llenó. La capacidad es para 100 personas, y tuvieron 96 asistentes y recaudaron \$1 760 de entradas.

- ¿Cuántos niños asistieron?
- ¿Cuántos adultos asistieron?

b) El perímetro de un rectángulo es de 30 cm, y sabemos que la base es 1 cm más larga que la altura. Plantea un sistema de ecuaciones y resuélvelo para hallar las dimensiones del rectángulo.

c) El perímetro de un triángulo isósceles es de 19 cm. La longitud de cada uno de sus lados iguales excede en 2 cm al doble de la longitud del lado desigual. ¿Cuánto miden los lados del triángulo?

d) Vanesa y Raquel fueron al cine y compraron dos helados sencillos de chocolate y un jugo en vaso grande por \$68. Si se sabe que el precio del jugo en vaso grande vale el doble del precio de un helado sencillo de chocolate, ¿cuál es el precio de un helado de chocolate y cuál el de un jugo en vaso grande?

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método que consideres pertinente.

a) $2x + y = 14$, $x = y + 1$

b) $2x + 2y = 160$, $x = 3y$

c) $2x - y = 15$, $x = 2y$

d) $x + y = 7\,500$, $y = x + 1\,800$

e) $x + y = 2$, $2x + 3y = 5$

f) $2x - y = 3$, $4x + 3y = 1$

g) $3x - 2y = 3$, $x - 3y = -6$

h) $x + y = 1$, $3x + 2y = 3$

3. Elige uno de los sistemas anteriores y plantea un problema que se resuelva con dicho sistema. Una vez diseñado tu problema, plantéalo al resto de tus compañeros para que lo resuelvan.

Para leer

¿Has escuchado a alguien decir que las matemáticas "se ponen de los mil diablos"?, pues para que veas que esta frase es sólo un dicho popular y que no es tan difícil comprenderlas, puedes leer el libro *El diablo de los números*. Búscalo en los Libros del Rincón.

¿Quién lee más?

Aprendizaje esperado: Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Contenido: Variación lineal y proporcionalidad inversa, por medio de tablas y expresiones algebraicas

Para arrancar

1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica.

Fabián y Catalina empezaron hoy a leer un libro de 350 páginas, para su clase de español. Fabián lee 25 páginas al día, mientras que Catalina va a un ritmo de 35 por día. Pero él ya había leído 100 páginas durante las vacaciones previas, de manera que inicia su lectura a partir de donde se quedó.

a) Elaboren tablas donde se muestre cuántas páginas leídas llevan Fabián y Catalina cada dos días.

b) Respondan las siguientes preguntas.
- ¿Cuánto tarda cada quien en terminar el libro?
- ¿Quién acabará primero?

c) Comenten en el grupo y con su profesor sus respuestas, compartiendo la estrategia que siguieron para llenar las tablas.

Relaciónalo

En primer grado, se estudiaron situaciones de variación funcional, donde los valores de una cantidad dependen de los valores de la otra, es decir que cambian o varían según los valores de la primera. Se resolvieron problemas en los que la relación entre los conjuntos de cantidades era tanto de proporcionalidad directa como de variación lineal en general.

Se estudiaron sus diferentes formas de representación, por medio de tablas, graficas o expresiones algebraicas y se observó que cualquiera de esas representaciones nos proporciona la misma información sobre la relación. Consulten los materiales correspondientes si es necesario.

Reto

1. Por equipos resuelvan lo siguiente.

Celestino y Leonardo tienen una pecera con capacidad de 300 litros. La limpian periódicamente y al terminar la vuelven a llenar con una manguera. El flujo de agua de la manguera lo controlan manualmente con una llave, de manera que la cantidad de agua por minuto que entra a la pecera puede variar desde 0 —con la llave cerrada— hasta 12 litros por minuto —con la llave totalmente abierta—.

a) Respondan las siguientes preguntas.
- ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse la pecera si Leonardo y Celestino abren totalmente la llave? ______
- ¿Cuál sería el tiempo de llenado si la llave se abre a la mitad, es decir, de manera que el flujo sea de seis litros por minuto? ______
- Al bajar el flujo a la mitad, ¿el tiempo para llenar la pecera aumenta o disminuye? ______

b) Elaboren una tabla que muestre los tiempos de llenado para flujos de agua que varíen de dos en dos litros por minuto.
- ¿Cuáles son las cantidades que se relacionan entre sí en esta situación?
______
- ¿Hay alguna cantidad que permanezca constante? ______

Relaciónalo

La relación entre dos conjuntos de cantidades es de *proporcionalidad inversa* si siempre que los valores de una aumentan, los de la otra disminuyen y viceversa, y si al multiplicar un valor de una de ellas por un factor, el valor correspondiente de la otra cantidad se divide por el mismo factor; además, el producto de cada par de valores de uno y otro conjunto, permanece constante.

LECCIÓN 10

Relaciónalo

El uso de literales para representar cantidades que varían o pueden tomar diferentes valores, se inició en primer grado, con las fórmulas para calcular perímetros y áreas de figuras geométricas. Y tanto en primer grado como en segundo, hemos usado letras para representar valores desconocidos, al resolver ecuaciones.

Recuerden que cualquier letra o literal se puede usar para representar una incógnita o una cantidad que varía, siempre que esta sea la misma para una situación o problema.

- Describan la relación entre las cantidades cuyos valores están variando en esta situación ____

c) Determinen en el equipo cuál de las siguientes expresiones algebraicas representa —la situación de llenado de la pecera— suponiendo que representamos con x el flujo de agua en litros por minuto, y con t el tiempo en minutos que tarda en llenarse de agua la pecera:

$$t = 300x$$
$$xt = 300$$
$$x + t = 300$$
$$300 = \frac{x}{t}$$

- Expliquen por qué las expresiones incorrectas no corresponden con la información del llenado de la pecera de Celestino y Leonardo ____

d) Utilicen la expresión algebraica que representa la situación para comprobar los datos de la tabla elaborada en el inciso b.

e) Comparen sus resultados y procedimientos entre equipos y compartan sus conclusiones con su profesor.

Pistas

e

1. En los mismos equipos del Reto, tomen en cuenta las siguientes preguntas y sugerencias como orientaciones para la resolución del Reto.

- ¿Cuáles son las cantidades relacionadas en la situación de llenar de agua la pecera? ¿Hay otra cantidad que permanece constante, sin cambio?
- Cuando los valores de una de las cantidades cambian, ¿los de la otra cantidad también cambian o dependen de la primera? ¿Cómo es esa relación?
- Organizar los datos de las dos cantidades en una tabla puede ser de ayuda para encontrar la expresión algebraica que representa la relación.
- ¿La expresión algebraica les permite encontrar otros valores de las cantidades?

Para analizar

Un nuevo reto

e

1. En equipos de tres analicen la siguiente información y hagan lo que se indica a continuación.

Martina y Bruno van a comprar chocolate para fundir, ya que desean elaborar y vender galletas y frutas cubiertas con chocolate. Para empezar quieren gastar \$1 000, y van a una tienda donde les ofrecen una gran diversidad de calidades y precios.

Para saber cuáles serían sus costos, van anotando el precio por gramo de diferentes tipos de chocolate, así como las cantidades en gramos que obtendrían con sus $1 000. Los primeros datos que registraron fueron los siguientes:

Precio ($/g)	4.00	2.00	1.50	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20
Gramos		500		1 000				

TABLA 10.1 Precio por gramo de chocolate y gramos comprados con $1 000.

a) Completen la TABLA 10.1, y analicen la relación entre el precio por gramo de chocolate y la cantidad medida en gramos.

b) Describan cómo varían los gramos cuando cambia el precio por gramo.

____

____

c) Respondan las siguientes preguntas.
- ¿Cuál es la cantidad que permanece constante en esta situación?

  ____
- ¿Los productos de pares de valores —de precio por gramo y de gramos comprados— son constantes? ________________

d) Encuentren la expresión algebraica que representa esta situación. Seleccionen en el equipo las literales que representen a cada una de las cantidades que intervienen en esta situación y comprueben que se obtienen los mismos datos que hay en la tabla.

4/5

Se vale

Comunicación asertiva y autoconocimiento

Al llevar a cabo las actividades de esta lección, procuren atender y entender activamente los puntos de vista de sus compañeros de equipo y de los demás miembros del grupo. Al finalizar, identifiquen qué aprendizajes tuvieron debido a esta actitud durante la lección.

Formalización

En el llenado de la pecera, las cantidades que están variando y que se relacionan entre sí son:

La cantidad o flujo de agua que entra a la pecera, y ________________

Lo que no cambia, mientras las otras dos cantidades sí pueden variar, es ________.

Para saber cómo es la relación entre las cantidades que varían, comparemos algunos datos:

Si se abre totalmente la llave que da paso al agua, es decir, que entran 12 litros cada minuto, la pecera tardará en llenarse ________ minutos.

Si la llave se abre para que pase solo la mitad de agua por minuto, 6 litros, la pecera tardará en llenarse ________ minutos.

- ¿El tiempo de llenado aumentó o disminuyó? ________________
- Al multiplicar el flujo de agua por $\frac{1}{2}$, ¿el tiempo se multiplica por ese mismo factor? ________________
- ¿Lo anterior es los que se observa cuando hay proporcionalidad directa entre las cantidades? Expliquen ________________

  ____

Vemos que si el flujo de agua es la mitad, el tiempo ____________. Esto indica que posiblemente se trata de una relación de proporcionalidad inversa entre flujo de agua y tiempo de llenado.

e

2. En el mismo equipo de Un nuevo reto hagan lo siguiente.

a) Calculen al menos otros dos tiempos de llenado con diferentes flujos de agua.

- Si el flujo se reduce a una tercera parte (cuatro litros por minuto), ¿cuál sería el tiempo para llenar la pecera? ____________________

b) Obtengan el producto de varios pares de valores.

- Calculen por ejemplo $\left(12\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{m}}\right) \times (25 \text{ minutos}) =$ __________ litros .

¿Se obtiene siempre el mismo valor, igual a la cantidad constante en esta situación?

____

c) Completen la **TABLA 10.2** con diferentes valores de flujo de agua y de tiempos.

Flujo de agua (l/min)	2	4	6	8	10	12
Tiempo de llenado (minutos)			50			25

TABLA 10.2 Tiempo de llenado de acuerdo con el flujo del agua.

- Expliquen cómo calcularon los valores faltantes en la tabla: ____________________

____

Para encontrar la expresión algebraica que represente esta situación, veamos los cálculos que se han realizado. Al abrir la llave e ir aumentando el flujo de agua hacia la pecera, va disminuyendo el tiempo en que ésta se llena. Pero la capacidad de la pecera no cambia, siempre hay que completar sus 300 litros; esto significa que, para cualquier flujo de agua y su tiempo de llenado correspondiente:

$$(\text{flujo en litros por minuto}) \times (\text{tiempo de llenado en minutos}) = 300 \text{ litros}$$

Si representamos las cantidades como

$$x = \text{flujo en litros por minuto}$$
$$t = \text{tiempo de llenado en minutos}$$

llegamos a la expresión algebraica para la relación entre estas dos cantidades:

$$xt = 300$$

3. Reúnete con otros dos compañeros y hagan lo que se indica.

a) Comprueben que utilizando $xt = 300$, se pueden obtener todos los valores de la tabla.

b) Encuentren otros pares de valores que tengan las mismas propiedades, por ejemplo:

- $\frac{300}{5} =$ __________ minutos

- $\frac{300}{1} =$ __________ minutos

c) Comparen esta situación —del llenado de la pecera— con la inicial de la lección —sobre los ritmos de lectura de dos alumnos— y señalen las diferencias entre ellas, respecto de la naturaleza de las relaciones entre las cantidades, y sus respectivas representaciones algebraicas.

- Elaboren un resumen de esta comparación.

d) Comenten entre equipos y con su profesor sus resultados.

Si utilizan cualquiera de las otras expresiones algebraicas del Reto, para el caso de 4 minutos —por ejemplo— se llega a

$$t = 300 \times 4 = 1\,200 \text{ min}$$
$$t = 300 - 4 = 296 \text{ min}$$
$$t = \frac{4}{300}$$

que no son los valores de tiempo que aparecen en la tabla; así, la expresión que representa la relación entre las dos cantidades de esta situación es $xt = 300$.

Como se vio en la lección 7, cuando dos conjuntos de cantidades son inversamente proporcionales:

- Siempre varían en dirección opuesta: cuando los valores de una aumentan, los de la otra disminuyen y viceversa; al multiplicar un valor de una de ellas por un factor, el valor correspondiente de la otra cantidad se divide por ese mismo factor.
- El producto de los valores correspondientes de uno y otro conjunto, es constante.

Es posible representar una relación entre dos cantidades por medio de:

- Una tabla: se obtienen los valores desconocidos dividiendo el producto constante entre el valor correspondiente de la otra cantidad.
- Una expresión algebraica: asignando literales (x y y, por ejemplo) a los dos conjuntos de cantidades; como su producto es constante (k, por ejemplo), la forma de la expresión algebraica de una relación de proporcionalidad inversa es $xy = k$.

¡A practicar!

1. Reúnete con dos compañeros para analizar las siguientes dos situaciones, determinen cuáles son las cantidades que se relacionan entre sí, cómo es la relación, encuentren su expresión algebraica y comprueben sus conclusiones elaborando una tabla con los principales datos.

a) Victoria se va a ir de vacaciones con un grupo de amigos y es la encargada de comprar los boletos de autobús. Van a viajar 8 amigos, cada boleto cuesta \$350, y Victoria hace cuentas para saber cuánto va a tener que pagar en total por los boletos. Al día siguiente le avisan que se agregan dos amigos más, y Victoria calcula ahora cuánto deberá pagar. Para diferentes números de viajeros, ¿cómo calcula Victoria el costo total de sus boletos?

b) En la escuela se está organizando una excursión y se va a contratar un autobús que tiene 40 asientos. El autobús cobra \$2 000 por el viaje. Si se llena, ¿cuánto tendrá que pagar cada viajero? Si no se completa el cupo del autobús y la excursión se realiza con menos pasajeros, por ejemplo, con solo 20 o 10, ¿cuánto deberá pagar cada uno de ellos?

2. En las siguientes situaciones de la Lección 7, elabora una tabla con los datos de los dos conjuntos de cantidades, asigna literales a cada uno de ellos y determina la expresión algebraica de la relación entre cantidades. Comprueba que la expresión y la tabla contengan la misma información.

a) Tambos para almacenar agua, en la sección Reto.

b) Albañiles para levantar un muro, en Un nuevo reto.

c) Los pasos de Alicia, Ricardo y Rubén para recorrer una distancia, en la sección ¡A practicar!

d) Compra de una tableta entre varios amigos, en ¡A practicar!

TIC

Por parejas, elaboren tablas en una hoja de cálculo con los datos de las situaciones del problema 1 en la sección anterior, similares a las siguientes:

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4		Número de amigos que viajan	Costo de boletos ($)		Número de pasajeros en autobús	Costo a pagar por pasajero ($)	
5		0	0		40	50.00	
6		2	700		30	66.67	
7		4			25		
8		6			20		
9		8			15		
10		10			10		
11		12			5		
12					4		
13					2		
14							
15							

FIGURA 10.1

a) Contesten lo siguiente:
   - ¿Cuáles son las fórmulas de la hoja de cálculo que permiten completar cada tabla?
   - ¿Qué cantidades permanecen sin cambio en cada caso?
   - ¿Cómo se relacionan los datos con las constantes en cada fórmula?
   - Comparen las fórmulas de la hoja de cálculo con las expresiones algebraicas de las relaciones entre las cantidades del problema, en cada caso

b) Comenten sus respuestas en el grupo y con su docente.

Para terminar

1. Anoten en su cuaderno, de manera individual, los conocimientos y habilidades que hayan recordado en el transcurso de esta lección, así como los nuevos que adquirieron. Registren también sus dudas y comenten con su profesor o profesora.

2. Reúnete con un compañero y resuelvan.

En una escuela hay 32 alumnos por cada docente. Si se representa el número de alumnos por a, y el de profesores, por p, seleccionen la expresión algebraica que representa esa situación:

a) $a = 32p$
b) $p = 32a$

Expliquen su respuesta a otros equipos y en el grupo.

Portafolio de evidencias

Incluye para tu portafolio de evidencias la resolución de un problema de proporcionalidad inversa donde hayas determinado la expresión algebraica que representa la situación.

Cortando el pastel

Aprendizaje esperado: Analiza y compara situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreta y resuelve problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.

Contenido: Variación lineal y resolución de problemas de proporcionalidad inversa, utilizando tanto tablas como expresiones algebraicas y gráficas

Para arrancar

1. Lee la siguiente situación y haz lo que se pide.

Fermín va a comprar un teléfono celular que cuesta $7 500. Como no le alcanza para pagar esa cantidad al contado, pregunta por promociones y le informan que puede pagarlo en la modalidad de "meses sin intereses", a elegir entre 6, 12, 18 o 24 mensualidades iguales.

a) Determina el monto de los pagos que Fermín deberá efectuar en los diferentes plazos en que puede elegir pagar.
b) ¿Cuáles son las cantidades que están relacionadas entre sí?
c) ¿Qué cantidad depende de la variación en la otra y qué cantidad no cambia?
d) Comparen y expliquen sus resultados entre equipos, y comenten sus resultados con su profesor o profesora.

Reto

1. Resuelvan en equipos lo siguiente.

Hoy es la fiesta de cumpleaños de Érika y le hicieron un pastel grande, de 48 centímetros de largo, como se observa en la **FIGURA 11.1**. Ella quiere repartir todo el pastel por igual entre sus invitados, todas las rebanadas cortadas a lo ancho del pastel y del mismo tamaño, una para cada invitado.

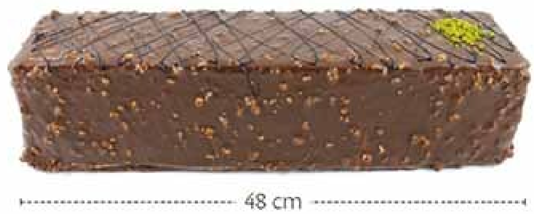


FIGURA 11.1 Pastel de chocolate.

a) Respondan las siguientes preguntas considerando que todos los invitados aceptan comer pastel, nadie repite, ninguno pide una rebanada de menor tamaño y en todos los casos la festejada está incluida entre las personas que toman pastel.

- Si hay 20 personas que van a recibir pastel, ¿de qué tamaño debe ser la rebanada, es decir, cuantos centímetros de ancho tienen sus rebanadas?

___

- Si se reparte pastel a 30 personas, ¿cuál debe ser el ancho de la rebanada?, ¿aumenta o disminuye?, ¿por qué?

___

LECCIÓN 11

- Si Erika cortó rebanadas de 4 centímetros, ¿para cuántas personas alcanzó el pastel? ______

2. En los mismos equipos del reto hagan lo que se indica.

a) Señalen cuáles son las cantidades que varían en el reto y cómo es la relación entre ellas. Expliquen su respuesta. ______
¿Cuál es el dato que permanece constante? ______
Elaboren una tabla como la 11.1, donde se muestren pares de datos del número de personas y el ancho de la rebanada que les corresponde.

Número de personas (x)	4	6	10	12	16	24	30
Ancho de rebanada (cm) (y)			4.8				
Largo del pastel (xy)			48				

TABLA 11.1 Número de personas y ancho de la rebanada que les toca a cada una.

b) Determinen la expresión algebraica que representa la situación de repartición del pastel, suponiendo que se representa con x el número de personas que reciben su rebanada de pastel, y con y el ancho de una rebanada en centímetros:

______

c) Tracen la gráfica que representa la relación: tomen pares de datos, obtenidos de la tabla o de la expresión algebraica, y ubiquen cada pareja de datos como un punto en un plano cartesiano; unan los puntos con una línea continua.

d) Contesten las preguntas del inicio del Reto, utilizando tanto la expresión algebraica como la gráfica.

e) ¿Se obtienen los mismos datos en cualquiera de las tres representaciones de la relación? ______

f) Observen la gráfica y respondan.

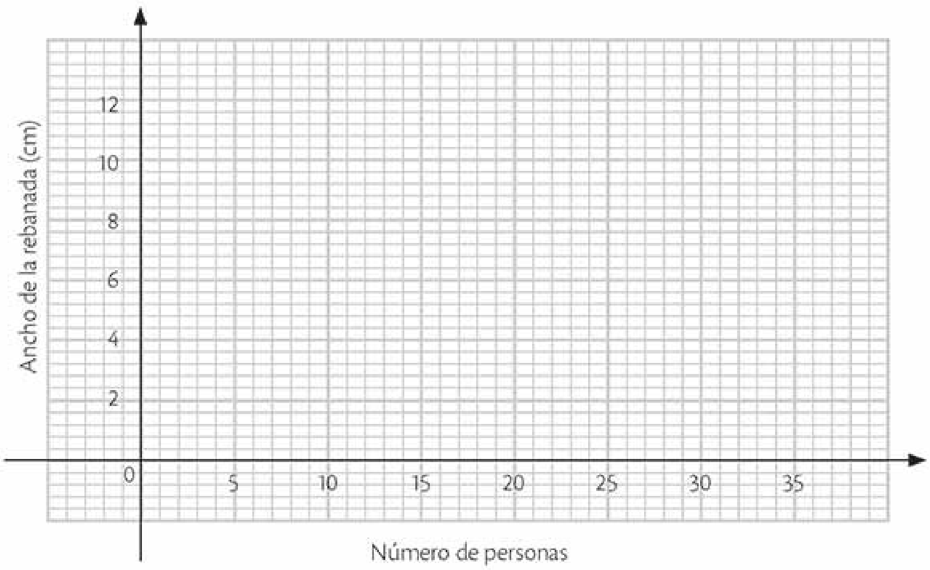


FIGURA 11.2 Representación gráfica de la relación entre el número de personas y el ancho de la rebanada que le corresponde a cada una.

- ¿Qué sucede con la gráfica cuando crece el número de personas que comerán pastel?, ¿aumenta o disminuye? ______

______

- ¿Para qué números de personas aumenta o crece más rápido el ancho de la rebanada? ______

______

g) Comparen sus resultados y procedimientos entre equipos y comenten con su profesor.

Pistas

e

1. En los mismos equipos del Reto respondan las preguntas y sigan las sugerencias como apoyo para resolver el Reto.

- ¿Cuáles son las cantidades cuyos valores están relacionados entre sí, en la situación de determinar el ancho de una rebanada de pastel a partir del número de personas a las que se les va a repartir?
- ¿Hay alguna otra cantidad que permanezca constante?
- ¿Cómo determinan si la relación entre conjuntos de cantidades es de proporcionalidad inversa?
- Si saben que dos cantidades están en relación de proporcionalidad inversa, ¿cómo se obtienen los valores faltantes para completar una tabla?
- A partir de los datos de las dos cantidades en una tabla, ¿cómo se puede encontrar la expresión algebraica que representa la relación?
- Si tienen pares de datos correspondientes a dos cantidades, ¿a qué corresponde en un plano cartesiano cada par de datos?
- ¿Cómo se traza la gráfica de la relación?

Para analizar

Formalización

p

1. En parejas lean la siguiente información, completen y hagan lo que se indica.

Al cortar y repartir el pastel de Erika, las cantidades que se relacionan son:

- El ancho de las rebanadas medido en centímetros, y

______

Ambas cantidades pueden aumentar o disminuir, tomando diferentes valores. Lo que permanece sin cambio es el tamaño del pastel: la suma total de las rebanadas que Erika corte, debe ser exactamente de 48 centímetros.

Para saber cómo es la relación entre las cantidades que varían, empecemos suponiendo que están presentes sólo 10 personas para repartir el pastel entre ellas; en otras palabras, Erika tiene que cortar su pastel en 10 rebanadas.

- ¿De qué ancho van a ser estas rebanadas?

______

- Expliquen su respuesta

____

____

Consideren que el número de personas se triplica, es decir, aumenta de 10 a 30.

- ¿Cómo cambia el ancho de la rebanada, aumenta o disminuye?
- ¿De cuántos centímetros sería?

FIGURA 11.3 Cuando aumenta la cantidad de invitados, disminuye el tamaño de la rebanada para cada uno.

Observando lo anterior, respondan.

- ¿Consideran que se trata de una relación de proporcionalidad directa o inversa?

____

- Expliquen su respuesta.

Vemos que, si el número de personas se triplica, la rebanada pasa a ser de una tercera parte. Esto indica que la relación entre personas y ancho de rebanada puede ser de proporcionalidad ____________________.

Compruébenlo:

- Si consideramos que el número de personas pasa a ser de la mitad (sólo cinco), el tamaño de la rebanada en este caso es de ________ centímetros.
- En los dos casos anteriores, 10 personas y 5 personas, al efectuar el producto de valores correspondientes de una cantidad y otra:

(10 rebanadas) × ____________________ = ________ cm
(ancho de la rebanada)

(5 rebanadas) × ____________________ = ________ cm
(ancho de la rebanada)

- ¿Se obtiene en ambos el mismo resultado, igual a la cantidad que permanece constante en esta situación: ________ centímetros?

Completen la tabla siguiente:

Número de personas	4	5	6	10	12	16	24	30	48	60
Ancho de la rebanada (cm)		9.6		4.8						

TABLA 11.2 Número de personas y tamaño de la rebanada en centímetros.

- Expliquen cómo obtuvieron los valores faltantes en la tabla.

Al ir aumentando el número de personas, las rebanadas de pastel van resultando cada vez más delgadas. Pero como siempre se reparte el mismo pastel, cualquier número de personas multiplicado por el ancho de la rebanada que le corresponde, da como resultado el total del pastel, que tiene un ancho de 48 centímetros; es decir que:

(Número de personas) $\times$ (ancho de rebanada que les corresponde) $= 48$

Así, si representamos las cantidades como:

x = número de personas
y = ancho de la rebanada en centímetros

Tenemos que la expresión algebraica para la relación entre estas dos cantidades es:

$$xy = 48 \quad \text{o} \quad y = \frac{48}{x}$$

Comprueben que, utilizando estas expresiones, se pueden obtener todos los valores de la tabla. También se puede extender la tabla para encontrar otros pares de valores que tengan las mismas propiedades; por ejemplo, para cuatro personas o para 24, el ancho de la rebanada de pastel es de:

$\frac{48}{4} =$ __________ centímetros $\qquad \frac{48}{24} =$ __________ centímetros

Al ubicar pares de datos en un plano cartesiano, se obtienen resultados como los siguientes; por ejemplo, los pares de datos de esta tabla se localizan como se muestra a continuación:

Número de personas	4	8	12	20	30	48	60
Ancho de la rebanada (cm)	12	6	4	2.4	1.6	1	0.8

TABLA 11.3 Número de personas y ancho en centímetros correspondientes a cada rebanada.

Relaciónalo

En una relación de variación lineal, la razón de cambio permite comparar lo que aumenta (o disminuye) la segunda cantidad, cuando aumenta (o disminuye) la primera:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{Cambio en la segunda cantidad}}{\text{Cambio en la primera cantidad}}$$

En la gráfica de esa relación, la razón de cambio nos dice cuánto sube o se eleva la recta cada vez que la cantidad en el eje horizontal, se incrementa en una unidad. Además, tanto la razón de cambio como la pendiente de la recta que representa la relación son constantes.

FIGURA 11.4 Representación gráfica de la relación entre el número de personas y el tamaño de cada rebanada de pastel.

Con base en esta distribución de los puntos en el plano, y si se trazara una línea que los una, observamos que:

- La gráfica es decreciente, es decir, que a medida que avanzamos por el eje horizontal, la altura de la gráfica disminuye; esto equivale a que, si aumenta el número de personas, disminuye el ancho de la rebanada.
- La gráfica crece más rápido si disminuye el número de personas, por ejemplo, menos de 20.
- La gráfica decrece más lentamente cuando el número de personas aumenta, por arriba de 20.

Así mismo, por la posición de los puntos en el plano, se observa que no están sobre una línea recta. Esto se puede comprobar si obtenemos las razones de cambio entre dos pares de puntos, por ejemplo, entre los puntos *P* y *Q* y entre *Q* y *R*:

$$\text{Razón de cambio PQ} = \frac{1 - 1.6}{48 - 30} = \frac{-0.6}{18} = -0.33$$

$$\text{Razón de cambio QR} = \frac{0.8 - 1}{60 - 48} = \frac{-0.2}{12} = -0.166$$

Las razones de cambio no son constantes, la pendiente o inclinación de la línea que une los puntos no es constante, va cambiando: por ello la línea que une los puntos debe ser una curva.

También, como una cantidad depende de la otra, el ancho de la rebanada cambia a medida que varía el número de personas, es decir, que la relación entre estas dos cantidades es una variación funcional, aunque no se trate de una situación de variación lineal.

Utilizando software para elaborar la gráfica, al unir los puntos con una línea continua se obtiene una curva como la siguiente.

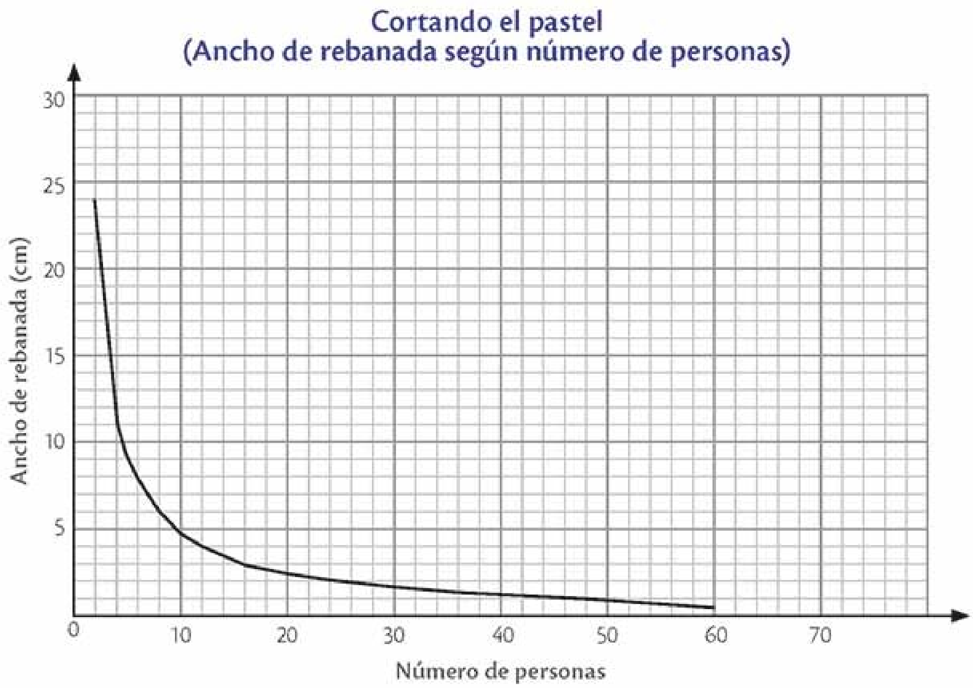


FIGURA 11.5 Representación gráfica de la relación entre el número de personas y el ancho de la rebanada, medido en centímetros.

Las relaciones entre cantidades que son inversamente proporcionales, como las que hemos visto, tienen representaciones gráficas similares a la de la **FIGURA 11.5** *Cortando el pastel*, son gráficas que se llaman *hipérbolas*.

- ¿Qué valores pueden tomar las cantidades involucradas en una relación de proporcionalidad inversa? ____________________
- ¿Qué relación tiene esto con sus gráficas?

____

En problemas como los estudiados en este libro, la situación misma implica ciertos valores posibles para las cantidades, así como otros valores que no tienen sentido o significado. Por ejemplo:

- El número de personas en la fiesta de Erika solo puede tomar valores enteros y positivos, y el valor más pequeño que se puede considerar es uno.
- En el caso de la compra del teléfono celular, como se trata de meses sin intereses, solo puede haber 6, 12, 18 o 24; el cero no se considera, ya que entonces sería pago de contado y ya no es la misma situación.

Por otra parte, si tenemos una expresión algebraica y su grafica asociada, no referidas a ningún contexto o situación cotidiana, si la expresión es del tipo $xy = constante$, y la gráfica una hipérbola como la de abajo, vemos que el único valor que no puede tomar ninguna de las dos cantidades es el de cero.

De hecho, como se puede ver en la gráfica que aparece en la **FIGURA 11.6**, la curva de la hipérbola nunca llega a tocar o cruzar los ejes de coordenadas, aunque se acerque mucho a ellos, ni la x ni la y alcanzan a tomar el valor de cero. Además, generalmente en las hipérbolas las cantidades sí pueden tomar valores numéricos negativos.

- ¿Conocen alguna situación en la que las cantidades asuman valores de números negativos? Escríbanla.

____

____

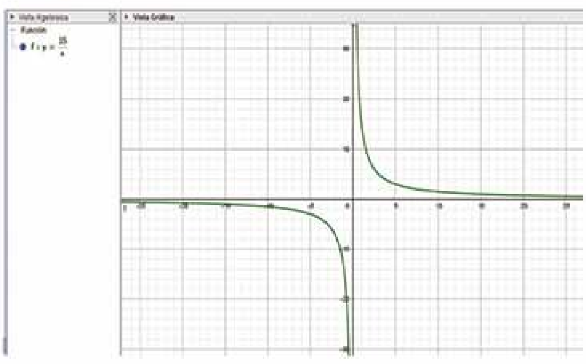


FIGURA 11.6 Hipérbola.

TIC

1. Por equipos, realicen las siguientes actividades para obtener la representación gráfica de la relación del corte del pastel por medio de una hoja de cálculo.

a) Introduzcan en la hoja una tabla con los datos siguientes.

Número invitados	Ancho de rebanada (cm)
60	0.80
48	1.00
36	1.33
30	1.60
24	2.00
20	2.40
16	3.00
12	4.00
10	4.80
8	6.00
6	8.00
5	9.60
4	12.00
2	24.00

TABLA 11.4 Número de personas y ancho de la rebanada en centimetros.

b) En el menú *Insertar*, seleccionen *Gráfico de dispersión con líneas suavizadas*; completen la gráfica con título, títulos de ejes, formatos de ejes y de la línea.

c) Si seleccionan *Gráfico de dispersión con líneas suavizadas y marcadores*, se obtiene una gráfica como la de la **FIGURA 11.7**.

FIGURA 11.7 Gráfico de dispersión don lineas suaves obtenida en hoja de cálculo.

2. Para obtener la representación gráfica de la relación del corte del pastel por medio del *software* GeoGebra:

a) En la Vista algebraica, introducir en la entrada $y = \frac{48}{x}$ y apretar Enter; aparecen tanto la expresión algebraica en el tablero izquierdo, como la gráfica en el plano cartesiano a la derecha.

b) Ajustar el *zoom* y la razón entre escalas de los ejes, para que aparezca aproximadamente de 0 a 100, tanto en el eje horizontal como en el vertical.

c) Desplaza el conjunto para que el origen quede cerca de la esquina inferior izquierda de la pantalla.

d) En la barra de herramientas, seleccionar *Punto* y *Punto en objeto*.

e) Mueve el cursor sobre el plano cartesiano, y colócalo sobre la curva; cuando aparezca la mano con el cuadro *"Función f"*, has seleccionado un punto sobre la curva.

f) Al dar clic, Geogebra asigna una letra mayúscula al punto y pone sus coordenadas en el tablero; repite esta operación para obtener las coordenadas de varios puntos sobre la curva. Con este procedimiento se obtiene un resultado similar al que se muestra en la **FIGURA 11.8**.

g) Comprueben que las coordenadas de cada punto hacen que se cumpla la expresión algebraica de la relación.

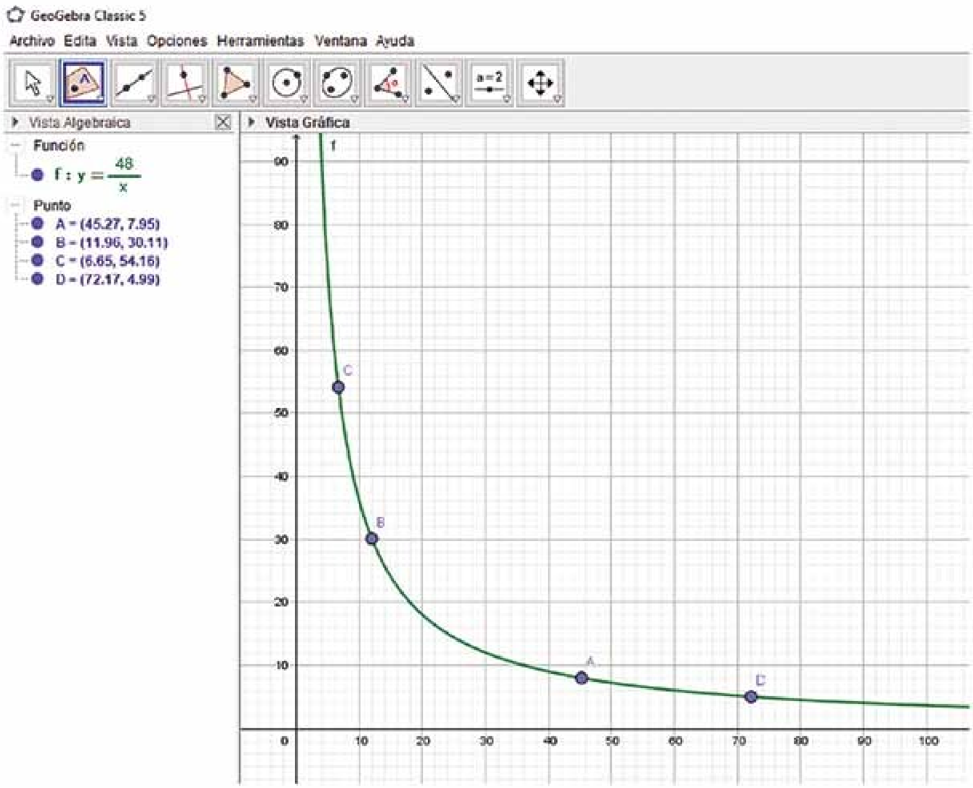


FIGURA 11.8 Gráfica de la relación del corte de pastel utilizando GeoGebra.

Comenten en su equipo y en el grupo, como estas actividades permiten comprobar que, con las tres representaciones de una relación entre dos cantidades inversamente proporcionales, se obtiene la misma información.

Un nuevo reto

e **1.** En equipos de tres, resuelvan el siguiente problema.

La piscina de Lety se llena en 10 horas, si se utilizan para llenarla un conjunto de seis mangueras que en total vierten agua a razón de 36 litros por minuto. Cada manguera aporta un flujo de seis litros por minuto, y puede optar por usar cualquier número de ellas para el llenado. Es decir, si abre solo una manguera, llenará la piscina a un ritmo de seis litros por minuto, si decide emplear dos mangueras, obtendrá un flujo de 12 litros por minuto, y así sucesivamente. Lety no abre parcialmente sus mangueras, solo las cierra o las abre totalmente.

a) Para determinar los distintos tiempos de llenado de la piscina con las diferentes opciones, completen la siguiente tabla. El flujo de agua se mide en litros por hora.

Número de mangueras utilizadas	1	2	3	4	5	6
Flujo (litros/hora)	360	720				2 160
Tiempo de llenado (horas)						10

TABLA 11.5 Flujo en litros por hora respecto del tiempo de llenado.

b) El tiempo de llenado de la piscina (horas) depende del flujo de agua (litros por hora): mientras mayor sea el flujo de agua, menor será el tiempo que tardará en llenarse la piscina. Esto indica que posiblemente se trate de una relación inversamente proporcional. A fin de averiguar si es así, utilicen los datos de la tabla para efectuar lo siguiente:

- Al multiplicar el flujo por hora por algún factor, ¿el tiempo de llenado se divide entre ese mismo factor? ____________________
- Si el flujo se duplica de 360 $\frac{l}{h}$ a 720 $\frac{l}{h}$, ¿el tiempo se reduce a la mitad?
____
- Comprueben para otros pares de valores.
- Al multiplicar el flujo de 2 160 $\frac{l}{h}$ por 10 horas, se obtiene el resultado de 21 600 litros, ¿en todos los demás casos, el producto del flujo por el tiempo de llenado arroja el mismo resultado? ____________________

c) Determinen la expresión algebraica de esta relación y respondan.

Para todos los pares de valores, el producto del tiempo de llenado por su correspondiente flujo es de 21 600 litros. Esta cantidad permanece constante sin importar cuánto varíen el flujo de agua y el tiempo para llenar la piscina.

- ¿Qué significa esta cantidad? ____________________
- ¿A qué corresponde en esta situación del llenado de la piscina? __________
- Expliquen su respuesta.

2. Analiza la siguiente información y haz lo que se indica.
Como observamos que en todos los casos:

$$\left(\text{flujo en } \frac{l}{h}\right) \times (\text{tiempo de llenado en horas}) = 21\,600\, l$$

Si designamos las siguientes literales para representar las cantidades:
f: flujo de agua en litros por hora.
t: tiempo para llenar la piscina en horas.
Entonces, la expresión que representa la relación entre las cantidades es:

$$ft = 21\,600$$

a) Comprueba que, sustituyendo valores en esta expresión, se obtienen los mismos datos que los contenidos en las dos filas inferiores de la tabla inicial del problema.

Para obtener la gráfica que representa esta relación, tomen los pares de datos de llenado de la tabla o de la expresión algebraica; ubíquenlos como puntos en un plano cartesiano:

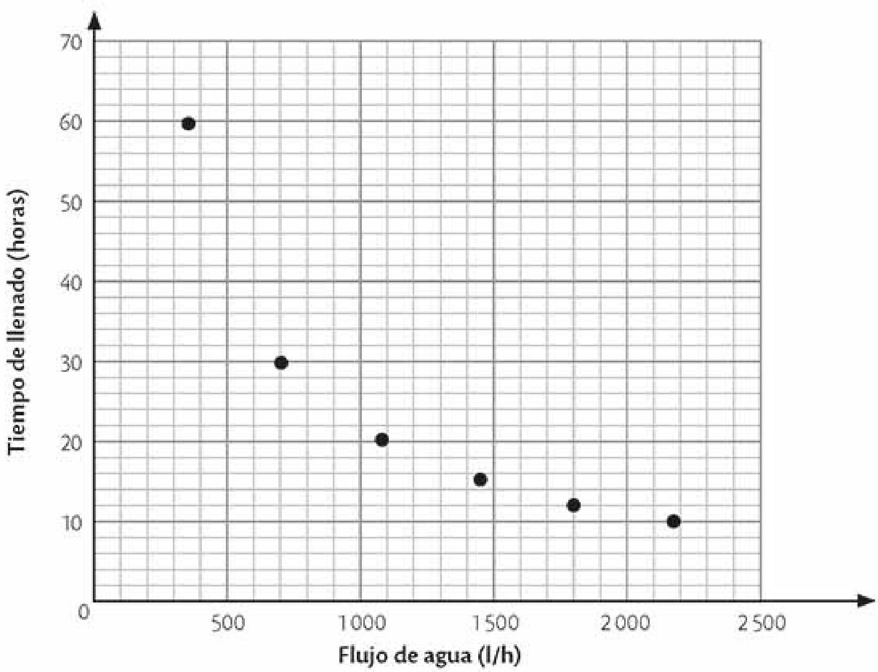


FIGURA 11.9 Representación gráfica del tiempo de llenado respecto del flujo de agua.

b) Une los puntos con una línea curva continua. Obtén las razones de cambio entre dos pares de puntos en el plano, ¿son iguales o diferentes? __________

- Explica. __________

c) Describe la gráfica respondiendo las siguientes preguntas.

- ¿La gráfica es creciente o decreciente? __________
- ¿Para qué valores de flujo de agua la gráfica crece o decrece más rápido? __________
- ¿Para qué valores crece o decrece más lentamente? __________

d) Explica por qué con las tres representaciones de la relación entre el flujo de agua a la piscina y el tiempo de llenado, se observan los mismos datos.

¡A practicar!

e

1. Reúnete con dos compañeros y resuelvan los siguientes problemas.
   a) En la situación de Un nuevo reto, del llenado de la piscina de Lety, consideren los datos de las dos primeras filas: el número de mangueras abiertas y el flujo de agua en litros por hora.
      - Encuentren la expresión algebraica de la relación entre las cantidades.
      - En sus cuadernos, ubiquen los puntos que representan los datos y calculen la razón de cambio entre dos pares de puntos.
      - Tracen y describan la gráfica que representa la relación entre estas cantidades.
   b) En la lección 10 obtuvieron las tablas y expresiones algebraicas de varias situaciones de la lección 7:
      - Tambos para almacenar agua, en la sección Reto.
      - Albañiles para levantar un muro, en Un nuevo reto.
      - Compra de una tableta entre varios amigos, en ¡A practicar!

   Ahora, utilizando sus cuadernos, ubiquen en planos cartesianos los datos de cada situación, tracen las gráficas uniendo los puntos, y calculen razones de cambio entre dos pares de puntos. Finalmente, describan la gráfica en cada situación.

Para terminar

Portafolio de evidencias

Incluye en tu portafolio de evidencias la solución al Reto, así como la resolución de un problema de proporcionalidad inversa donde hayas encontrado la representación gráfica de la situación.

1. Registra en tu cuaderno los conocimientos y habilidades nuevos que hayas adquirido sobre proporcionalidad inversa, así como los que hayas recordado sobre este tema u otros. Anota también tus dudas y coméntalas con tu profesor(a).
2. Reúnete con dos compañeros y diseñen una situación de proporcionalidad inversa.
   a) Elaboren su tabla de datos.
   b) Encuentren la expresión algebraica.
   c) Tracen la gráfica que represente la situación.
   d) Presenten sus resultados a otro equipo.

Para leer

La proporcionalidad inversa y sus gráficas

Las relaciones entre cantidades que son inversamente proporcionales, como las que hemos visto, tienen representaciones gráficas similares a la de la FIGURA 11.6, son gráficas que se llaman *hipérbolas*. Tanto las expresiones algebraicas como las gráficas de las hipérbolas se estudian a partir de la educación media superior.

¿Qué valores pueden tomar las cantidades involucradas en una relación de proporcionalidad inversa? ¿Que relación tiene esto con sus gráficas?

En problemas como los estudiados en este libro, la situación misma implica ciertos valores posibles para las cantidades, así como otros valores que no tienen sentido o significado. Por ejemplo:

- El número de personas en el reparto del pastel de Erika solo puede tomar valores enteros y positivos; el mínimo seria de uno.

- En el caso de la compra del teléfono celular, como se trata de meses sin intereses, solo puede haber 6, 12, 18 o 24; el cero no se considera, ya que entonces sería pago de contado.

Por otra parte, si tenemos una expresión algebraica y su gráfica asociada, no referidas a ningún contexto o situación cotidiana, si la expresión es del tipo $xy = constante$, y la gráfica una hipérbola como la de la FIGURA 11.10, vemos que el único valor que no puede tomar o asumir ninguna de las dos cantidades es el de cero. Para explicar esto, vamos a referirnos a algunas de las situaciones que hemos analizado:

- En el cortado del pastel, se puede cortar una rebanada de un grado de amplitud e incluso más delgada; se puede reducir hasta llegar muy cerca del cero, pero no llegar a cero grados exactamente: si queremos ancho cero, no estaríamos cortando una rebanada, no estamos cortando el pastel, y ya no hay fiesta de cumpleaños.
- En el caso del llenado de la pecera de Celestino y Leonardo (lección 10), el flujo de agua para llenar la pecera se puede ir reduciendo gradualmente, de manera continua, aproximándonos cada vez más al cero, pero, ¿qué pasa si le cerramos a la llave y ya no pasa agua? Pues que ya no estaríamos llenando la pecera, es otra situación, el cero no forma parte de la situación de llenar la pecera.

De hecho, como se puede ver en la gráfica de la FIGURA 11.10, la curva de una hipérbola nunca llega a tocar o cruzar los ejes de coordenadas, aunque se acerque mucho a ellos, ni la x ni la y alcanzan a tomar el valor de cero.

Asimismo, como pueden apreciar en esta última gráfica, en términos generales en las hipérbolas las cantidades si pueden tomar valores numéricos negativos. Den ejemplos de situaciones en las que las cantidades tomen valores de números enteros o fraccionarios negativos.

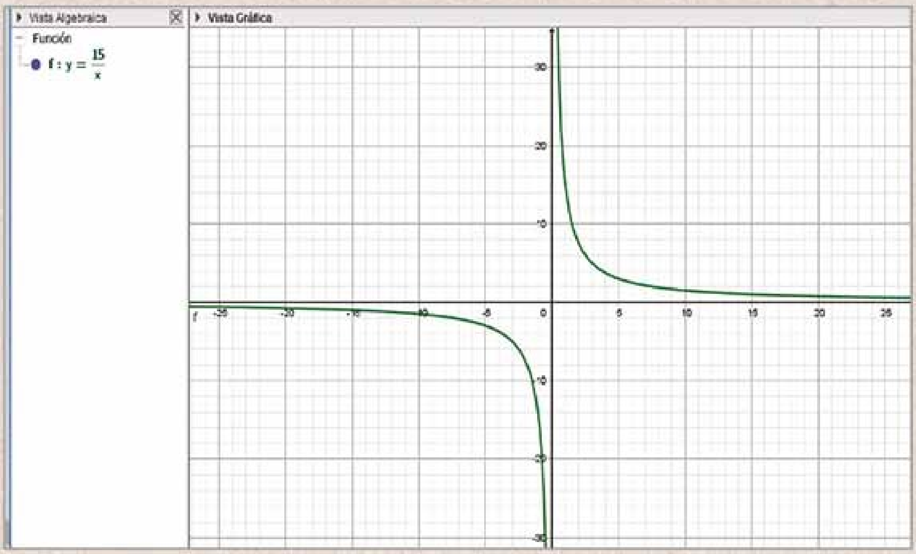


FIGURA 11.10 Gráfica de una hipérbola.

Evaluación del Trimestre 1

Autoevaluación

Aprendizajes esperados	Sin dificultad	Con dificultad	Necesito ayuda
Resuelvo problemas de multiplicación y división con fracciones y decimales positivos.			
Resuelvo problemas de multiplicación y división con números enteros, fracciones, y decimales positivos y negativos.			
Resuelvo problemas de potencias con exponente entero y aproximo raíces cuadradas.			
Resuelvo problemas de proporcionalidad directa e inversa y de reparto proporcional.			
Resuelvo problemas mediante la formulación y solución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.			
Analizo y comparo situaciones de variación lineal y proporcionalidad inversa, a partir de sus representaciones tabular, gráfica y algebraica. Interpreto y resuelvo problemas que se modelan con este tipo de variación, incluyendo fenómenos de la física y otros contextos.			

Evaluación

De manera individual, resuelve los siguientes problemas:

1. Se prepara una bebida con 3 partes de jarabe y 7 partes de agua. Luego se hace otra mezcla en una proporción de 1 porción de esta bebida por 3 porciones de leche. Si se quieren hacer 5 litros de la primera bebida, ¿cuánto jarabe se necesita?

a) 1.5 litros **b)** 2 litros **c)** 3 litros **d)** 4.5 litros

2. De un frasco de medicina se tiró $\frac{1}{5}$ del contenido total. Cada dosis es de $\frac{1}{10}$ del contenido total. ¿Cuántas dosis completas quedan en el frasco?

a) 5 dosis **b)** 8 dosis **c)** 10 dosis **d)** 15 dosis

3. En una tienda se ofrece una promoción en la que se pueden llevar 3 productos por el costo de 2. Además, algunos de estos productos participan en otra promoción: tienen un descuento inicial del 20%, es decir, sólo se pagan $\frac{4}{5}$ de su precio original.

Si el precio original de un producto que participa en ambas promociones es de \$120.00, ¿cuánto paga un cliente que se lleva 3 de esos productos?

a) \$48 **b)** \$72 **c)** \$96 **d)** \$192

4. En una tienda se ofrece una promoción general que consiste en descontar ¼ parte del precio de etiqueta de las prendas; pero además, en las prendas marcadas con etiqueta roja, se aplica un descuento adicional al pagar en caja. Este descuento adicional consiste en multiplicar el precio ya rebajado por 0.12. ¿Cuánto se debe pagar por un producto cuyo precio original es de $238.90? Muestra tus operaciones.

5. Un número se divide entre $\frac{3}{4}$ y resulta −20. ¿Cuál es ese número?

a) −15 **b)** 15 **c)** −60 **d)** 60

6. Con $7\frac{1}{5}$ litros de agua de naranja se quieren llenar vasos de $\frac{1}{4}$ de litro. ¿Cuántos vasos se podrán llenar?

a) 35 **b)** 36 **c)** 39 **d)** 45

7. Si tenemos la siguiente operación y se modifican los signos de los números, ya sea de las bases o las potencias, ¿con cuál de las opciones se obtiene el menor número?

$$(2^2)\,(2^3)$$

a) $(-2)^2\,(-2)^3$ **b)** $(2)^{-2}\,(2)^{-3}$ **c)** $[(-2)^{-2}]\,[(-2)^{-3}]$ **d)** $-[(-2)^{-2}]\,[(-2)^{-3}]$

8. Si tenemos la siguiente operación y se modifican los signos de los números, ya sea de las bases o las potencias, ¿con cuál de las opciones se obtiene el menor número?

$$\frac{(2^2)}{(2^3)}$$

a) $\frac{2^{-2}}{2^3}$ **b)** $\frac{2^2}{2^{-3}}$ **c)** $\frac{2^{-2}}{2^{-3}}$ **d)** $\frac{-2^2}{-2^3}$

9. Tres sobrinos de don Enrique: Néstor, Uriel y Remigio, se dedican a encerar y a pulir automóviles. Don Enrique les proporciona los materiales que usan, ya que tiene una refaccionaria y ellos le pagan lo que van consumiendo. Por el total de cera que han usado los dos últimos días les tiene que cobrar $624. Si Néstor tomó 1.1 litros de cera, Remigio 2.4 litros y Uriel 1.7 litros, ¿cuánto le corresponde pagar a cada uno por la cera que utilizó?

	Néstor	Remigio	Uriel
a)	128	290	206
b)	132	288	204
c)	144	274	202
d)	182	236	206

Evaluación

10. Una bodega se llena con 1 500 sacos de 6 kg de papas cada uno. Otra bodega con la misma capacidad se va a llenar con sacos de papa de 5 kg cada uno. ¿Cuántos de estos últimos caben en la segunda bodega?

a) 1 800 **b)** 1 700 **c)** 1 640 **d)** 1 400

11. En una clase de baile hay 30 alumnos entre hombres y mujeres. Los alumnos se organizan para ir a un salón de baile a practicar sus mejores pasos y asisten 26 alumnos. Se sabe que al baile asistieron el 75% de los hombres y todas las mujeres. ¿Cuántos chicos y cuántas chicas hay en la clase de baile?
¿Cuál es el sistema de ecuaciones que resuelve el problema?

a) $x+y=30$
$x+y=26$

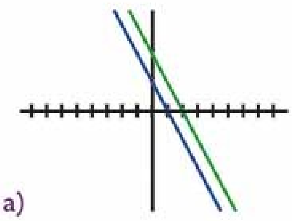
b) $x+y=26$
$0.25\,x+0.75\,y=30$

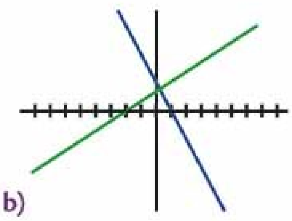
c) $x+y=30$
$0.75\,x+y=26$

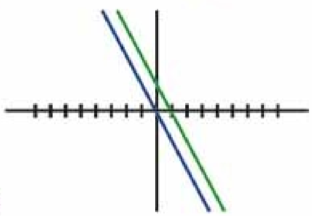
d) $x+y=26$
$0.75\,x+0.25\,y=30$

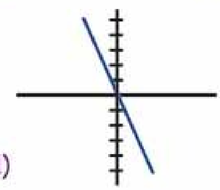
12. ¿Cuál o cuáles de los gráficos que se proponen puede corresponder al siguiente sistema de ecuaciones?:

$$2x + y = 1$$
$$4x + 2y = 2$$

a)


b)


c)


d)


13. Claudia y Carmen fueron al cine y compraron dos postres sencillos de chocolate y un vaso grande de agua de sabor por \$ 60.00. Si se sabe que el precio del agua de sabor en vaso grande cuesta el doble del precio de un postre sencillo de chocolate, ¿cuál es el precio de un postre de chocolate y cuál el de un vaso grande? Plantea un sistema de ecuaciones y resuélvelo para dar respuesta al problema.

14. Faustino tiene que bajar de peso, un total de 18 kg. Él quiere bajar tres kilogramos por semana para acabar rápido, pero su médico le señala que es demasiado, y le recomienda que solo trate de bajar 1.5 kilogramos por semana.

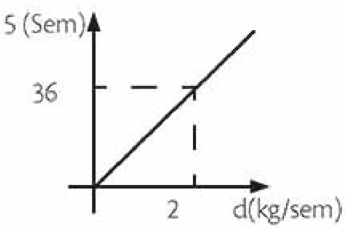
- Si Faustino sigue la recomendación del médico, ¿en cuánto tiempo habrá disminuido su peso en los 18 kilogramos, es decir, cuánto tardará el tratamiento?

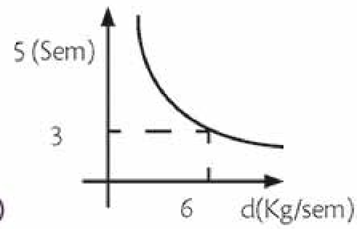
a) 3 semanas **b)** un mes **c)** 9 semanas **d)** 12 semanas

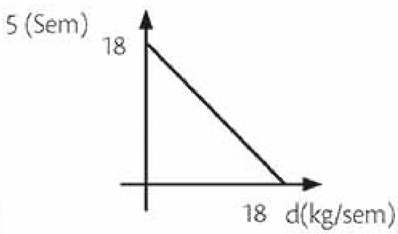
- Si se representa el número de semanas de tratamiento con s, y la disminución de peso por semana con d, la expresión algebraica que representa la relación entre estas cantidades es:

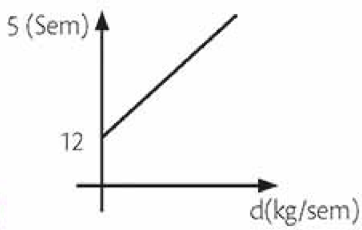
a) $s = 18d$ **b)** $sd = 18$ **c)** $s + d = 18$ **d)** $d = s + 3$

- ¿Cuál de las siguientes gráficas puede representar la relación entre la disminución de peso por semana y el número de semanas del tratamiento, así como la expresión algebraica correspondiente?:

a)


b)


c)


d)


15. Las siguientes figuras presentan una regularidad.

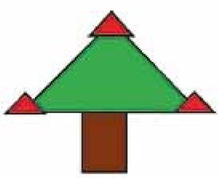


Fig. 1

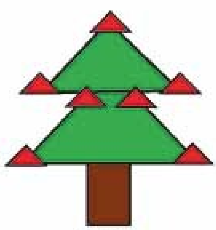


Fig. 2

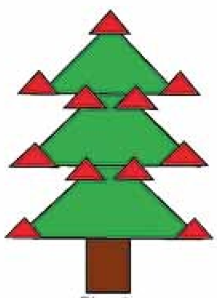


Fig. 3

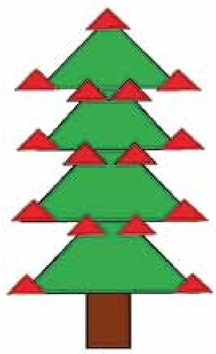


Fig. 4

Escribe dos expresiones equivalentes que permitan calcular el número de triángulos rojos de cualquier figura de la sucesión.

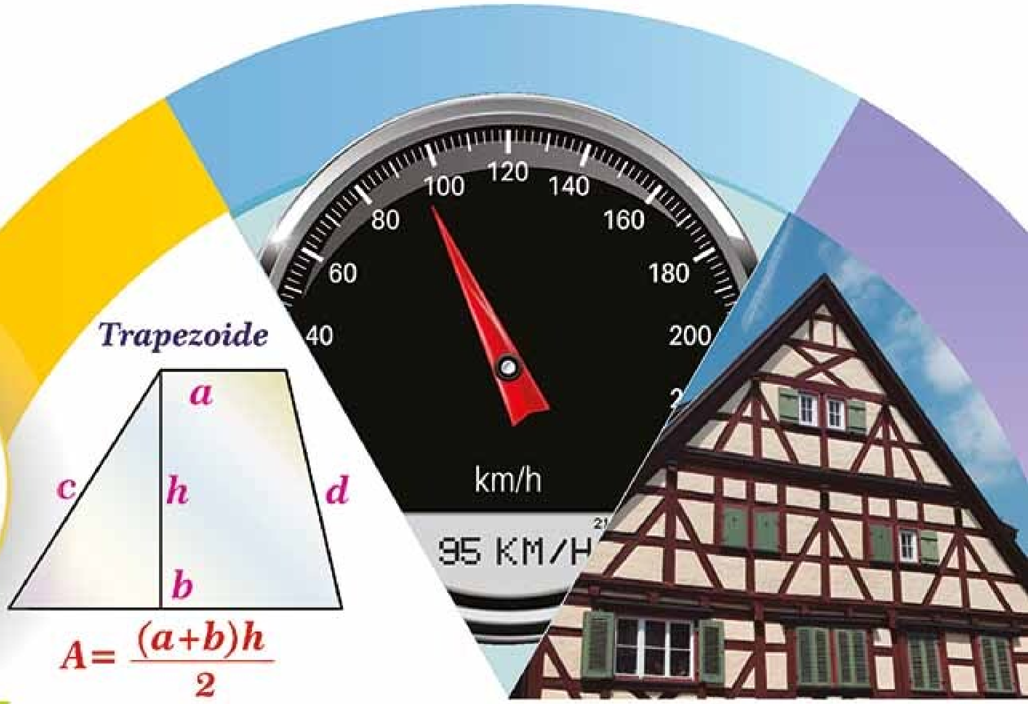
Expresión 1: ______________________________

Expresión 2: ______________________________

T2

Trimestre 2

1. ¿Sabías que con las expresiones algebraicas puedes generalizar la representación de perímetros y áreas de algunos polígonos?



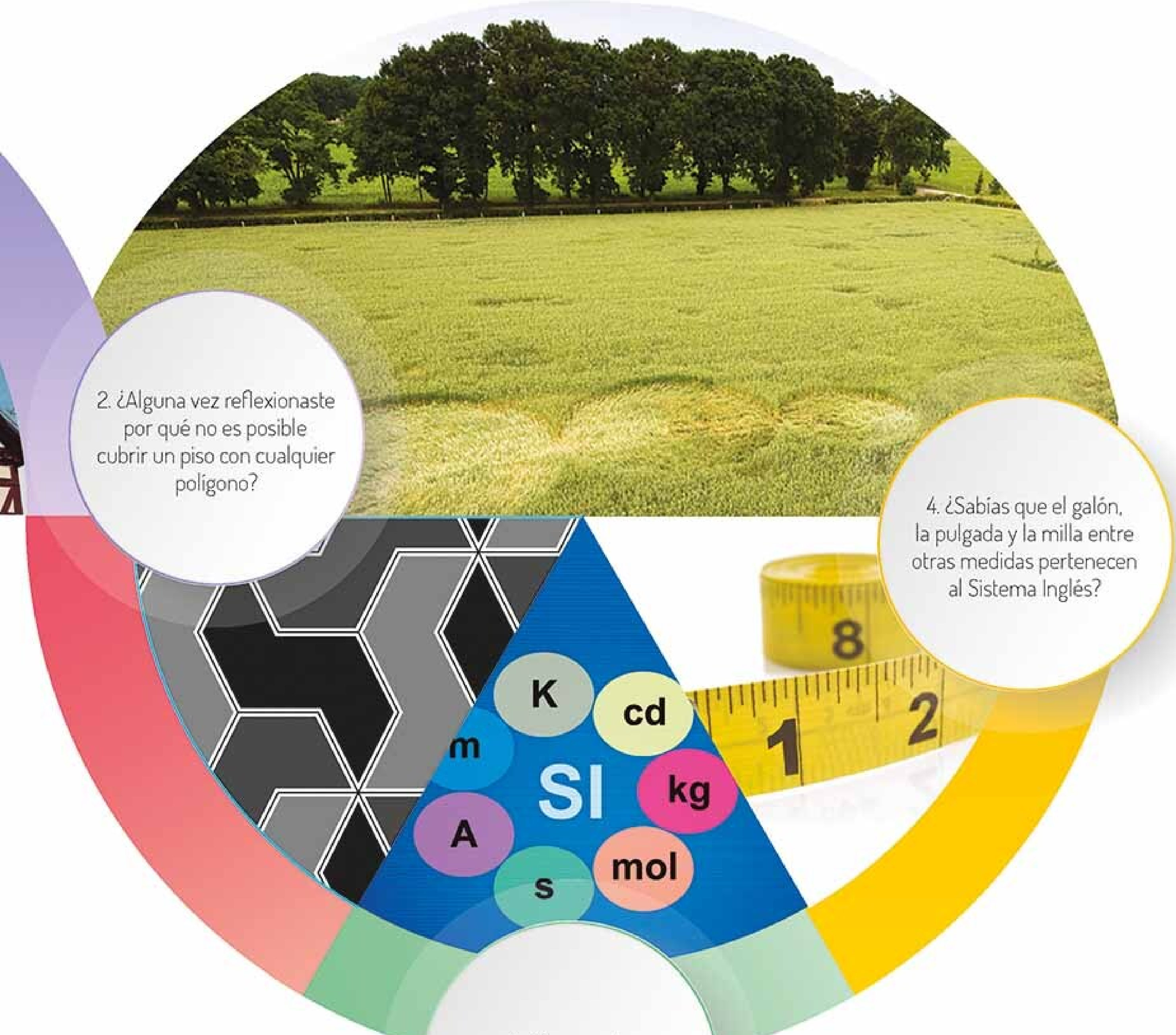
Propósitos del trimestre

Al término del trimestre, se espera que puedas plantear y resolver problemas que:

- Involucren formular expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verificar equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de figuras).
- Involucren deducir y usar las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.
- Implican trazar polígonos que cubren el plano; analizar la construcción de mosaicos (teselados) en los que se usan polígonos regulares e irregulares.
- Implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).
- Implican calcular el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

No te limites en las estrategias que utilices para la solución de los problemas, aun cuando no uses los métodos convencionales o sugeridos por el profesor, ya que el propósito principal es valorar procesos y comprensión de los mismos, más que resultados. En el equipo que trabajes, comenten, intercambien ideas, hagan dibujos, utilicen la calculadora, la computadora e inclusive involucren a otras personas si es posible y necesario.

Es importante que, al término, expongan sus trabajos, comenten las dificultades encontradas y expliquen las estrategias que siguieron, escuchen con atención lo que mencionan los otros compañeros para que conozcan diferentes caminos hacia la solución de un problema y recuerden que el trabajo colaborativo puede ayudar para tal fin, además de facilitar la detección y la corrección de errores. Lo anterior es pensar matemáticamente.



2. ¿Alguna vez reflexionaste por qué no es posible cubrir un piso con cualquier polígono?

3. ¿Conoces la importancia del Sistema Internacional de Medidas?

4. ¿Sabías que el galón, la pulgada y la milla entre otras medidas pertenecen al Sistema Inglés?

Reglas equivalentes

Aprendizaje esperado: Verifica algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.

Contenido: Equivalencia de expresiones de primer grado

Para arrancar

1. Resuelve el siguiente problema.

Las imágenes de la **FIGURA 12.1** representan el diseño de jardines de una nueva zona residencial. En dos de los lados de cada jardín se colocan losetas cuadradas del mismo tamaño.

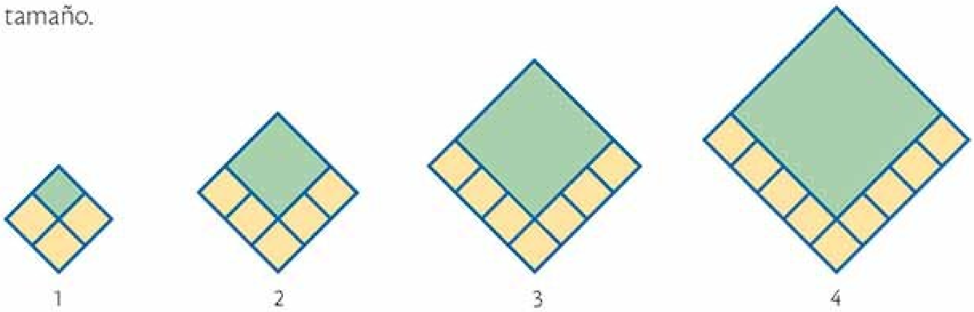


FIGURA 12.1 Diseño de cuatro jardines de diferentes tamaños.

a) ¿El diseño corresponde a una sucesión? ¿Por qué?

b) ¿Cuál es la sucesión numérica que representa el número de losetas por lado de cada diseño?

c) ¿Cuáles de las cuatro expresiones que se dan a continuación son reglas generales equivalentes de la sucesión de números de losetas?

$3(n + 1)$ $\qquad$ $n + (n + 1)$ $\qquad$ $2n + 1$ $\qquad$ $3 + 2(n - 1)$

e

2. Reúnete con otros dos compañeros y comparen sus respuestas, comenten cómo fue que determinaron la regla general. Luego, realicen lo siguiente:

a) Escriban los primeros 8 términos de la sucesión numérica que corresponde al número de cuadrados de la sucesión que se muestra en la **FIGURA 12.2**.

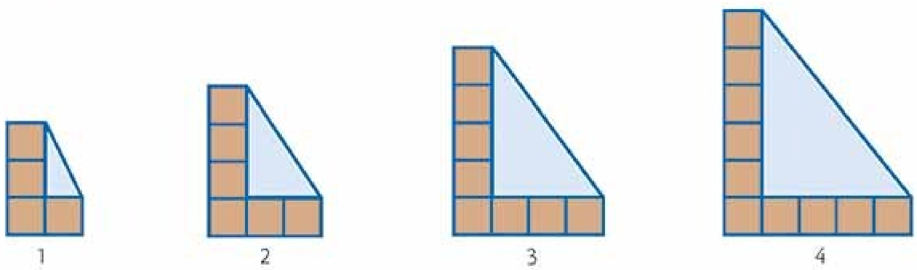


FIGURA 12.2 Sucesión de cuadrados y triángulos.

b) Escriban una regla general de la sucesión expresada algebraicamente.

LECCIÓN 12

Reto

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

¿Cuál es la regla general, expresada algebraicamente, de la sucesión numérica que resulta del número de cuadrados de la sucesión de cuadrados? ____________________

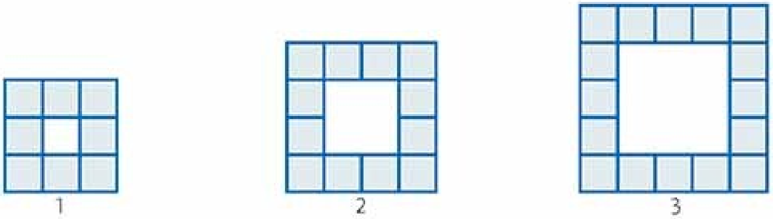


FIGURA 12.3 Sucesión de marcos cuadrados.

- ¿Cuál es la sucesión numérica que representa el número de cuadrados sombreados de la sucesión de figuras?
- ¿Cuál es la regularidad que se observa en las figuras?
- ¿Si se representa como n el número de posición de cada figura, ¿cuál será la regla general que permite determinar el número de cuadrados en cualquier figura de la sucesión?

a) En el equipo de Carlos están Lourdes y Claudia. Ellos tienen el siguiente diálogo:

- Carlos: La sucesión numérica del número de cuadrados es: 8, 12, 16, …
- Claudia: Veo que aumenta de cuatro en cuatro.
- Carlos: Yo me acuerdo que la regla general se asocia con el número de la posición de cada término y se multiplica por la constante aditiva que es cuatro.
- Claudia: Sí, en primer grado aprendimos que al número de la posición se representa con la literal n, entonces es 4 por n.
- Lourdes: Yo una vez vi a mi hermano encontrar la fórmula general haciendo descomposiciones de la figura, por ejemplo, si definimos como n a dos cuadrados, entonces la figura se puede descomponer de esta forma:

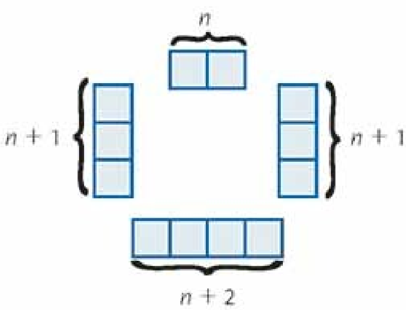


FIGURA 12.4 Descomposición del segundo marco en términos de la posición $n = 2$.

- Carlos: ¿Y qué hacemos con las expresiones algebraicas?
- Lourdes: Pues sumar sólo es cuestión de sumar cada una de las expresiones.
- Claudia: A ver, hagamos la suma y a ver qué resulta.
- Carlos: Intenten ustedes con esa forma yo intento como aprendimos en primer grado. Luego comparamos.

2. Reúnanse con otra pareja de compañeros y comparen la fórmula general que obtuvieron. En caso de que no coincidan, justifiquen cómo fue que llegaron a esa expresión general. Si por alguna razón no llegan a un acuerdo acerca de cuál de las dos expresiones algebraicas es correcta, verifiquen si con ella se genera la sucesión 8, 12, 16, … Una vez que estén de acuerdo de cuál es la respuesta correcta, entre todos respondan las siguientes preguntas:

a) Si n representa el número de la posición de cada término de la sucesión, ¿cuál de las siguientes reglas es la que corresponde a dicha sucesión?
- El número de la posición se multiplica por 4, y al resultado se le suma 4.
- El número de la posición (excepto el número de la posición 1) se le resta 1, luego el resultado se multiplica por 4.

b) Expresen algebraicamente cada una de las reglas anteriores.

____

c) Comprueben qué sucesiones se generan de cada una de ellas. ¿Generan la misma sucesión? ______________________________

d) Cuando dos o más expresiones algebraicas representan un mismo valor numérico, entonces, son expresiones equivalentes. Ejemplo:

$2(n + 1)$ es equivalente a la expresión $2n + 2$ porque para cualquier valor de n, en ambas expresiones se obtiene el mismo valor numérico; por ejemplo, si $n = 4$, en ambas expresiones resulta el valor numérico 10; es decir: $2(4 + 1) = 10$; $2(4) + 2 = 10$.

De acuerdo con lo anterior; ¿las dos reglas que escribieron son equivalentes?

e) Ahora realicen la siguiente suma que es la que propuso Lourdes del equipo de Carlos.

$$n + 1 + n + 1 + n + 2 + n =$$

f) Comprueben que la expresión algebraica a la que llegaron al realizar la suma genera la sucesión 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, …

Pistas

3. En las mismas parejas del Reto, respondan a las siguientes preguntas que los pueden apoyar en la resolución del reto.
- Si una sucesión con progresión aritmética es aquella en donde cada término, excepto el primero, es igual al anterior más una constante denominada constante aditiva, ¿cuál es la constante aditiva de la sucesión?
- Encuentren y escriban los siguientes cinco términos de la sucesión (los correspondientes al número de cuadrados)

8, 12, 16, ______, ______, ______, ______, ______, …

- Si $n = 1$, ¿qué operaciones se deben hacer con n y 4 para obtener 8?

Para analizar

Un nuevo reto

1. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

Para cada sucesión, encuentren dos expresiones algebraicas equivalentes que sean reglas generales.

Sucesión 1

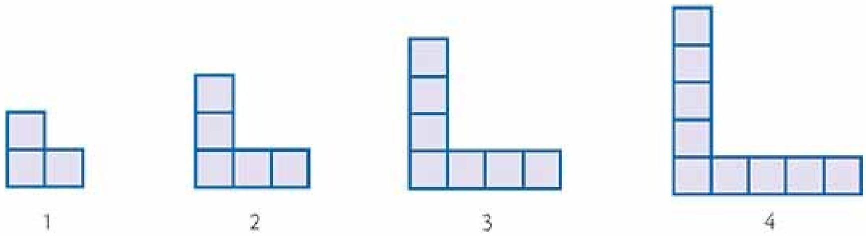


FIGURA 12.5 Cuadrados en forma de L.

Descomposición del término 3

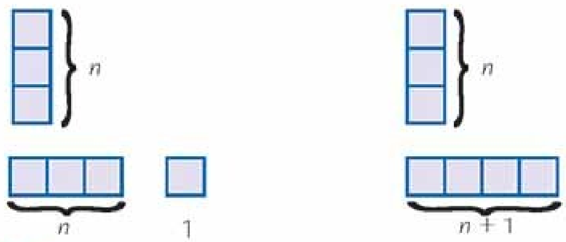


FIGURA 12.6 El término. se puede descomponer al menos de dos formas distintas.

Sucesión 2

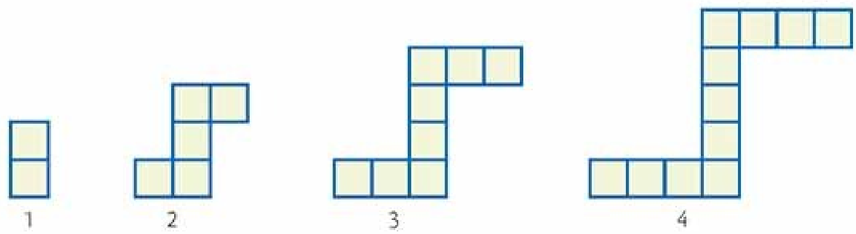


FIGURA 12.7 Cuatro términos de una sucesión de cuadrados en forma de S.

Descomposición del término 3

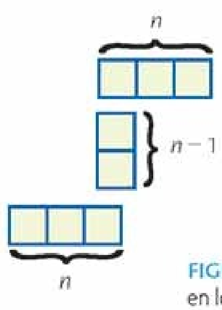


FIGURA 12.8 El tercer término de la sucesión 2 se puede descomponer en los elementos verticales y horizontales que lo conforman.

2. Comparen sus respuestas con las de otra pareja de compañeros. En caso de que haya diferencias, verifiquen por qué. Si tienen dudas, coméntelas a su docente. Luego, respondan las siguientes preguntas.
   a) ¿Cuál es la sucesión numérica que representa el número de cuadrados de la sucesión 1?

b) ¿Lograron establecer como regla general algunas de las siguientes expresiones algebraicas? ¿Cuáles?

$$n + (n + 1)$$
$$n + n + 1$$
$$2n + 1$$

c) ¿Las siguientes expresiones algebraicas son equivalentes? ¿Cómo lo pueden verificar?

$n + (n + 1)$ $\quad\quad$ $2n + 1$ $\quad\quad$ $n + n + 1$

d) En el caso de la segunda sucesión, ¿lograron establecer como regla general algunas de las siguientes expresiones algebraicas? ¿Cuáles?

$$2 + 3(n - 1)$$
$$2n + n - 1$$
$$3n - 1$$

e) ¿Las siguientes expresiones algebraicas son equivalentes? ¿Cómo lo pueden verificar?

$2 + 3(n - 1)$ $\quad\quad$ $3n - 1$ $\quad\quad$ $2n + n - 1$

f) Si tienen dudas, exprésenlas con el resto del grupo para que entre todos las disipen.

Formalización

El concepto de expresiones algebraicas equivalentes es muy importante y por eso hay diferentes criterios para determinar cuándo dos expresiones algebraicas son equivalentes. Dos criterios son los siguientes:

- Una expresión algebraica que genera una sucesión es *equivalente* a otra expresión algebraica si generan la misma sucesión. Por ejemplo:

  Regla general: $2n$
  Sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, …
  Regla general: $2 + 2(n - 1)$
  Sucesión: 2, 4, 6, 8, 10, 12, …

- Una expresión algebraica es *equivalente* a otra expresión algebraica si se puede transformar una en la otra mediante operaciones algebraicas válidas. Por ejemplo:

$$(n + 1) + 2(n - 2) = n + 1 + (n - 2) + (n - 2) = n + 1 + n - 2 + n - 2 = 3n - 3$$

Cuando se tienen dos expresiones equivalentes que generan una misma sucesión y se igualan ambas expresiones entre sí, se llega a una *identidad*. Una identidad es una ecuación en la que cada lado de la igualdad genera la misma sucesión de números. Las siguientes son identidades que pueden ser obtenidas en los problemas de arriba:

- $3 + 4(n - 1) = 4n - 1$
- $7 + 3(n - 1) = 3n + 4$
- $(3n - 1) + 2n = 5n - 1$

Como las partes derechas de las identidades anteriores son más simples que las partes de la izquierda, también se pueden pensar como reglas para *simplificar* expresiones. Otro rasgo importante de las identidades es que el resultado de sustituir un valor numérico en la variable en ambos lados de la identidad lleva a que el resultado de hacer las operaciones en la izquierda será el mismo número que el resultado de las operaciones de la derecha.

Por ejemplo:

Si $n = 3$, entonces:

$$\begin{aligned} 3 + 4(n - 1) &= 4n - 1 \\ 3 + 4(2 - 1) &= 4(2) - 1 \\ 3 + 4 &= 8 - 1 \end{aligned}$$

¡A practicar!

1. En cada sucesión, encuentra dos expresiones equivalentes que representen la regla general para determinar cualquier número de elementos de cada figura. Justifica cada caso que son expresiones equivalentes y que generan la sucesión numérica.

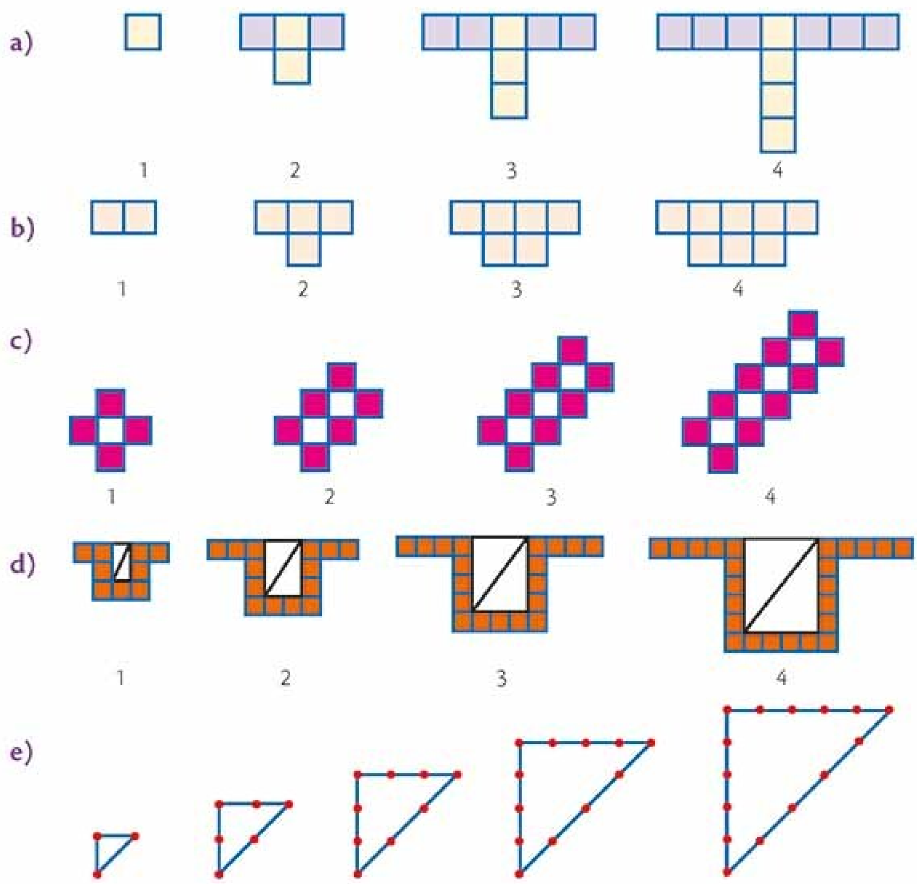


FIGURA 12.9 Sucesiones de figuras, de la a) a la d) formadas con cuadrados, y la e) formada con puntos.

2. Para cada una de las siguientes sucesiones, subraya las expresiones algebraicas que representen su regla general y escribe las igualdades necesarias para expresar su equivalencia algebraica.

a) $-2, -6, -10, -14, -18, \ldots$

$-4n + 2$ $\quad$ $-2 + 4(n - 1)$ $\quad$ $-2 - 4(n - 1)$ $\quad$ $4n - 1$

Equivalencia algebraica: ____________________

b) $6, 11, 16, 21, 26, \ldots$

$5(n - 1)$ $\quad$ $7 + 5(n - 1)$ $\quad$ $-2 + 5n + 7$ $\quad$ $5n + 2$

Equivalencia algebraica: ____________________

c) $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \ldots$

$\frac{1}{2}n + 1$ $\quad$ $-\frac{1}{2}n + 1$ $\quad$ $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n + 1)$ $\quad$ $-\frac{1}{2}n - 1$

Equivalencia algebraica: ____________________

3. Cada una de las siguientes igualdades, representan la equivalencia entre dos expresiones algebraicas que modelan la regla general de una sucesión. Circula en color rojo las que sean falsas.

a) $4(n + 3) = 8 + 4(n + 1)$

b) $7(n - 4) = -21 + 7(n + 1)$

c) $12 + 4(n - 2) = 4(n + 1)$

d) $-3n - 3 = -6 - 3(n - 1)$

e) $8 + 4(n - 1) = 4n + 4$

f) $\frac{2}{3} + \frac{2}{5}(n - 1) = \frac{2}{5}(n - 1)$

4. Compara tus respuestas y tus procedimientos con los de un compañero.

Portafolio de evidencias

Incluye para tu portafolio de evidencias la solución a Un nuevo reto donde especifiques claramente cómo determinas dos expresiones algebraicas equivalentes que sean reglas generales de cada sucesión.

Para terminar

1. Revisa toda la lección, verifica que tus respuestas sean correctas, luego, escribe en tu cuaderno qué conocimientos y habilidades nuevas adquiriste y cuáles recordaste para realizar operaciones con potencias. Anota cualquier duda que tengas para consultarla con tu profesor o profesora.

TIC

1. En la siguiente dirección electrónica podrás practicar sobre expresiones equivalentes. Realiza algunos ejercicios, toma nota de ellos y plantéalos a tus compañeros para que los resuelvan y puedan reafirmar sus conocimientos.

https://es.khanacademy.org/math/algebra/introduction-to-algebra/alg1-equivalent-expressions/e/equivalent-forms-of-expressions-1
(Fecha de consulta: 20/06/2018).

Para leer

¿Quién fue Fibonacci?

Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci (1170–1250) es un famoso matemático italiano famoso por difundir en Europa el sistema de numeración actualmente utilizado, esto es, un sistema de numeración posicional en base decimal y un dígito de valor nulo (cero), y por idear la siguiente sucesión:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

¿Qué regularidad identificas en la sucesión?

La sucesión de Fibonacci es una sucesión de números que se obtiene por adición de los dos números anteriores, por ejemplo, el número 8 se obtiene sumando 3 y 5.

A los elementos de esta sucesión se les llama números de Fibonacci. Esta sucesión no tendría nada de particular sino fuera porque aparece repetidamente en la naturaleza y, además, tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos, entre otras.

¿Somos iguales?

Aprendizaje esperado: Formula expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifica equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de figuras).

Contenido: Expresiones algebraicas para representar perímetros de figuras geométricas

Para arrancar

1. Resuelve el siguiente problema.

Un terreno tiene las dimensiones como se muestra en la **FIGURA 13.1**.

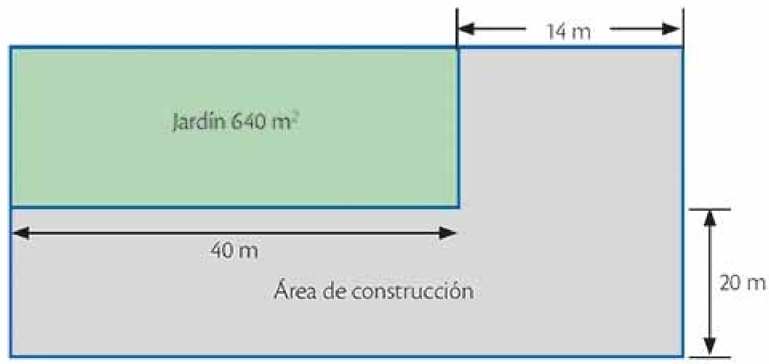


FIGURA 13.1 Terreno rectangular.

a) ¿Cuál es el perímetro de todo el terreno y cuántos metros cuadrados corresponden al área de construcción?

2. Reúnete con un compañero y comparen sus respuestas. En caso de que no coincidan, comenten qué operaciones hicieron para resolver el problema. Una vez que los dos estén de acuerdo con la respuesta, respondan las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo se calcula el perímetro de un rectángulo? ____________________

b) Si para calcular el perímetro de un rectángulo se usa la fórmula $P = 2(a + b)$, ¿qué representan a y b y el número 2? ____________________

c) ¿Qué significa la fórmula $A = bh$? ____________________

d) Comparen sus respuestas con otros compañeros y entre todos lleguen a las mismas conclusiones.

Reto

3. Reúnete con un compañero y resuelvan el siguiente problema.

De acuerdo con los datos que se dan en la **FIGURA 13.2**.

a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el perímetro de cada rectángulo?

LECCIÓN 13

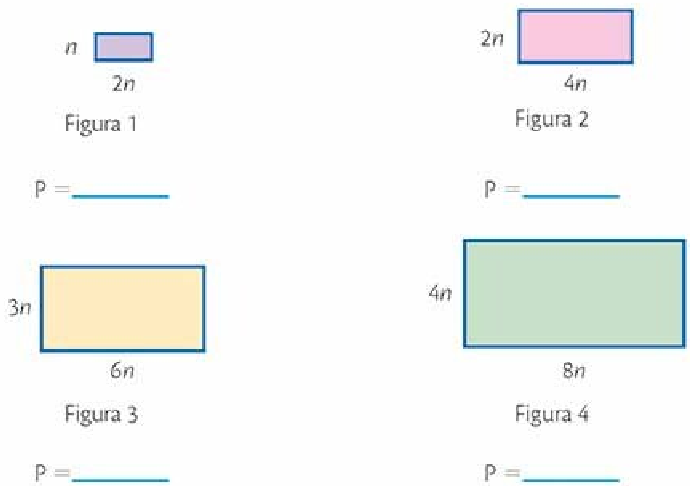


FIGURA 13.2 Magnitudes de rectángulos de diferentes tamaños.

b) Rosa y Ricardo tienen el siguiente diálogo cuando intentan resolver el problema.

- Rosa: Yo deduzco de la primera figura que n más n es igual a dos n.
- Ricardo: ¿Entonces significa que el perímetro del primer rectángulo es n más n más n más n más n más n?
- Rosa: Lo que no sé es cómo sumar seis veces n.
- Ricardo: Recuerdo que sumar varias veces un mismo número se representa con una multiplicación.
- Rosa: Pero aquí se trata de sumar letras.

c) Escriban qué les falta a Rosa y a Ricardo para resolver el problema.

____

____

Relaciónalo

En la lección anterior, aprendiste a realizar sumas como la siguiente:

$$n + 1 + n + 1 + n + 2 + n =$$
$$4n + 4$$
$$2n + n - 1 = 3n - 1$$

4. Reúnanse con otros dos compañeros y hagan lo que se indica.

a) Comparen las expresiones algebraicas que representan los perímetros de los rectángulos que escribieron en la actividad anterior.

b) Cuando terminen, coméntenle a su docente para que, con la coordinación de él o de ella, hagan una puesta en común, con todo el grupo, de sus respuestas.

c) Hagan lo siguiente.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representan las siguientes sumas y restas?

Representación verbal	Expresión algebraica
Suma de los perímetros de la figura 1 y de la figura 2	
El perímetro de la figura 4 menos el perímetro de la figura 2	
El perímetro de la figura 2 menos el perímetro de la figura 3	
La suma de los perímetros de las cuatro figuras	

TABLA 13.1 Representaciones verbales y sus expresiones algebraicas correspondientes.

Pistas

p

1. En las mismas parejas del Reto respondan las siguientes preguntas que los pueden guiar para resolver el reto.
   - ¿Cómo se expresa como multiplicación la siguiente suma: $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$? ______
   - ¿Cómo se expresa algebraicamente el doble de un número? ______
   - ¿Cómo se expresa como suma $7n$? ______

Para analizar

Un nuevo reto

1. Resuelve el siguiente problema.
   De acuerdo con los datos que se dan en la FIGURA 13.3 haz lo que se indica.
   a) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de cada rectángulo de color?

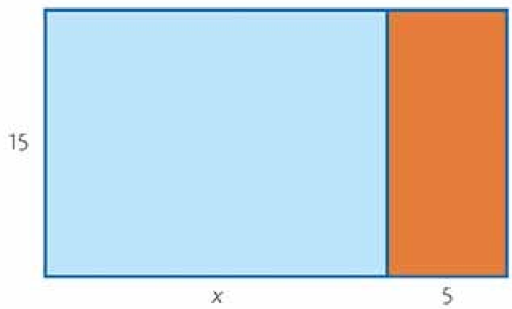


FIGURA 13.3 Rectángulo descompuesto en otros dos rectángulos.

Rectángulo azul: ______ Rectángulo naranja: ______

   b) ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de toda la figura?
   Área de toda la figura: ______

e

2. Reúnete con otros dos compañeros y comparen las expresiones algebraicas que representas las áreas de la actividad anterior.
   a) Justifiquen por qué consideran que sus respuestas son correctas.
   b) Una vez que estén de acuerdo sobre las respuestas correctas, respondan.
      - ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el producto del largo por el ancho del rectángulo mayor? ______
      - ¿Cuál es la expresión equivalente a la expresión algebraica que representa el producto de largo por el ancho del rectángulo mayor?
        ______
      - ¿Cuál es el resultado de la siguiente multiplicación?
        $$15(x + 5) = \_\_\_\_\_\_$$
      - ¿Cómo se puede justificar que las siguientes expresiones son equivalentes?
        $$15(x + 5) = 15x + 75$$

Un reto más

1. Reúnete con dos compañeros encuentren dos expresiones algebraicas equivalentes que expresen el área del rectángulo de color azul.

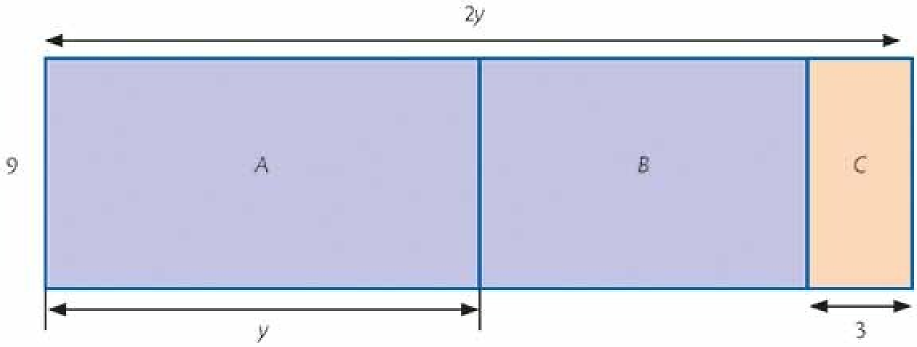


FIGURA 13.4 El rectángulo principal está dividido en tres rectángulos, y el rectángulo azul está dividido en los rectángulos A y B.

2. Comparen sus expresiones algebraicas con las de otros compañeros y hagan en conjunto lo que se pide.

a) En caso de que sus expresiones algebraicas no coincidan, justifiquen por qué consideran que sus expresiones son las correctas.

b) Si consideran necesario exponerlas ante todo el grupo, háganlo con la coordinación de su docente.

c) Para sistematizar toda la información generada, escriban las expresiones que se piden.

- Expresión algebraica que representa la longitud de la base del rectángulo B.

  ____

- Expresión algebraica que representa la longitud de la base del rectángulo azul $(A + B)$. ______________

  Área de los rectángulos.

  $A =$ ________ $B =$ ________ $C =$ ________

- Dos expresiones algebraicas equivalentes.

  ________ $=$ ________

- Comprobación de que las expresiones son equivalentes.

Si $y = 15$

Formalización

Si dos expresiones distintas permiten calcular la misma área, entonces son *expresiones algebraicas equivalentes.*

Las literales en el álgebra representan números. En ocasiones, pueden representar cualquier número, en otras ocasiones puede representar un solo número o números específicos, todo depende del contexto en que se encuentre.

En las *fórmulas* que generalizan los procedimientos para determinar el perímetro y área de las figuras geométricas, como en el caso del Reto y Un nuevo reto, no importa el valor que tenga la medida de los lados, el procedimiento es el mismo, y las fórmulas corresponden a un procedimiento general para calcularlos. Recuerda que, en primer grado, construiste fórmulas para calcular perímetros de diversas figuras, como por ejemplo del cuadrado, y seguramente lo escribías de cualquiera de las formas siguientes:

$$P = l + l + l + l, \quad \text{o} \qquad P = l \times 4 \qquad \text{o} \quad P = 4l$$

Estas fórmulas son *expresiones equivalentes*, porque cualquiera que usemos para obtener el perímetro nos dará el mismo resultado.

- ¿Qué representa l? ____________________
  ¿Cuántos y qué valores puede tener? ____________________
- ¿Qué representa la P? ____________________
  ¿Cuántos y qué valores puede tener? ____________________

Siempre que escribas o veas una fórmula, es decir una expresión matemática escrita con literales, es importante que reconozcas qué representan, por ejemplo, puede ser que la fórmula para representar el perímetro del rectángulo la encuentres escrita de la siguiente forma:

$$P = a + a + b + b$$

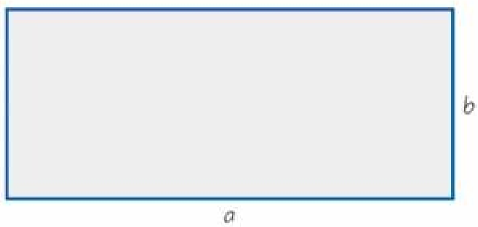


FIGURA 13.5 Rectángulo con magnitudes a y b.

- ¿Qué representa a? ____________________
- ¿Qué representa b? ____________________
- ¿Qué representa P? ____________________
- ¿Por qué crees que no representamos los lados del rectángulo con l?
  ____

¡A practicar!

1. Resuelve los siguientes problemas.

a) Selecciona las expresiones que representen el área del rectángulo.

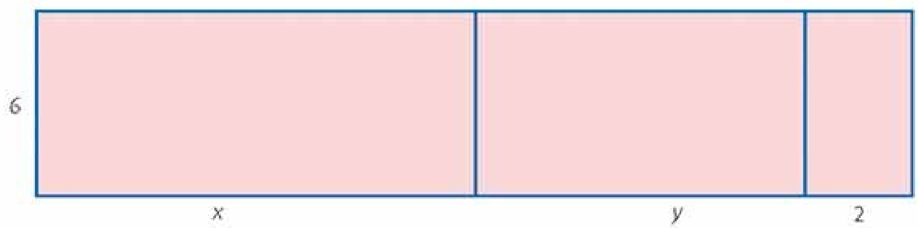


FIGURA 13.6 Rectángulo dividido en tres rectángulos de diferente tamaño.

$6x + 6y + 12$ $\qquad$ $6(x + y) + 12$ $\qquad$ $6x + 6(y + 2)$ $\qquad$ $6(x + y + 2)$ $\qquad$ $6xy + 12$

b) Escribe dos expresiones equivalentes que representen el área del rectángulo **FIGURA 13.7**.

Expresión 1: ____________________

Expresión 2: ____________________

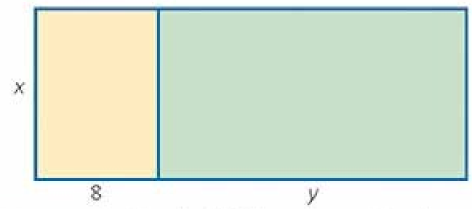


FIGURA 13.7 Rectángulo dividido en dos rectángulos.

c) Analiza la **FIGURA 13.8** y haz lo que se pide.

- Escribe dos expresiones equivalentes que representen el área del rectángulo azul.

Expresión 1: ____________________
Expresión 2: ____________________

- Explica cómo se puede obtener $ab - 20a$ a partir de $a(b - 20)$. ____________________

____

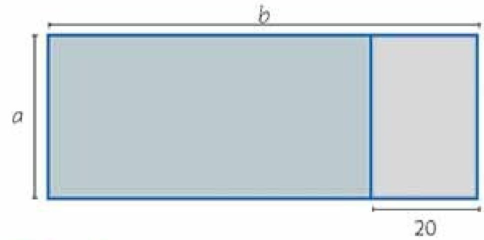
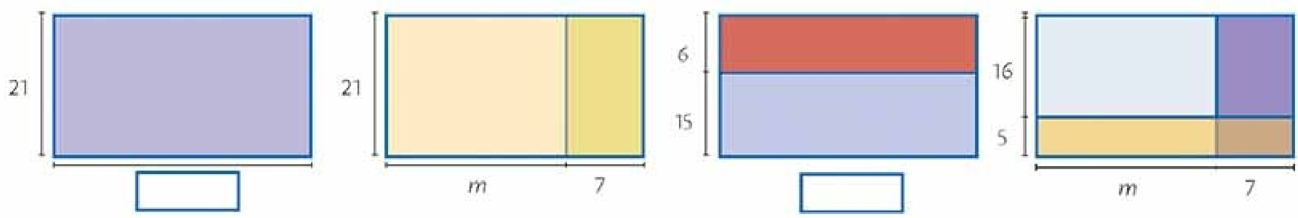


FIGURA 13.8 Rectángulo dividido en dos cuadriláteros.

d) Los siguientes rectángulos tienen la misma superficie. Para cada uno de ellos escribe una expresión algebraica que represente su área.



A= __________ A= __________ A= __________ A= __________

FIGURA 13.9 Cuatro rectángulos con la misma área divididos en diferentes cuadriláteros.

e) Divide la superficie del rectángulo mostrado en la **FIGURA 13.10** e indica las dimensiones correspondientes de las nuevas figuras, de manera que a partir de su área se pueda representar la equivalencia:

$$a(x + y + 1) = ax + ay + a.$$

FIGURA 13.10 Rectángulo.

f) Dibuja un rectángulo cuya área se represente con la expresión algebraica $5(2x + 4)$.

2. ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde a cada recuadro de manera que se cumpla el perímetro indicado en cada figura?

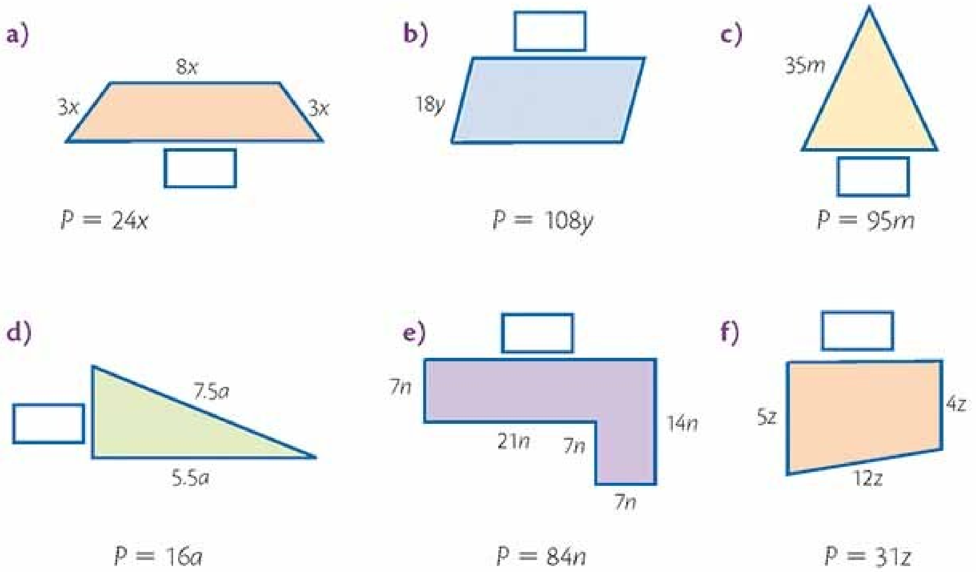
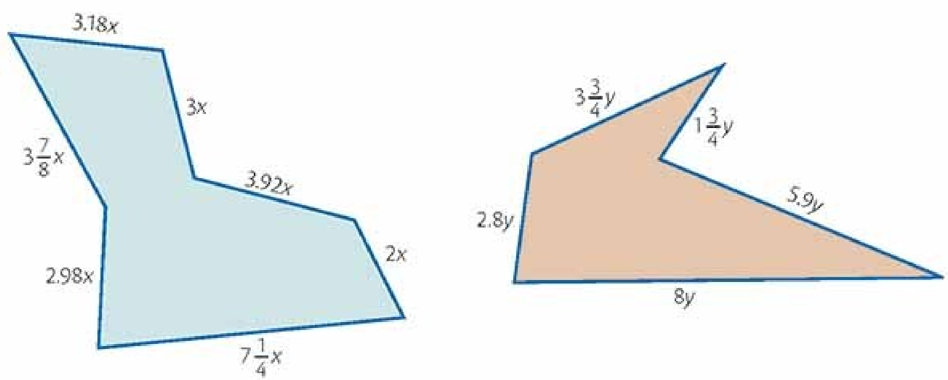


FIGURA 13.11 Polígonos de tres, cuatro y seis lados.

3. Escribe la expresión algebraica que representa el perímetro de cada uno de los siguientes polígonos.



Perímetro = ____________________ Perímetro = ____________________

FIGURA 13.12 Polígonos de 7 y 5 lados, respectivamente.

TIC

En la lección anterior se te sugirió realizar ejercicios de expresiones equivalentes en la dirección electrónica que aparece enseguida, sin embargo, ahora que tienes mayores conocimientos sobre expresiones equivalentes, podrás resolver con mayor facilidad los ejercicios que se plantean en la siguiente dirección electrónica.
https://es.khanacademy.org/math/algebra/introduction-to-algebra/alg1-equivalent-expressions/e/equivalent-forms-of-expressions-1. (Fecha de consulta: 22/06/2018).

Si tienes alguna duda sobre qué son las expresiones algebraicas equivalentes, puedes entrar en la siguiente dirección electrónica, en donde encontrarás una explicación de ello. https://es.khanacademy.org/math/algebra/introduction-to-algebra/alg1-equivalent-expressions/v/equivalent-algebraic-expressions-exercise.
(Fecha de consulta: 22/06/2018).

Para terminar

1. Revisa toda la lección y haz lo siguiente.
   a) Verifica que tus respuestas sean correctas.
   b) Escribe en tu cuaderno qué conocimientos y habilidades nuevas adquiriste, y cuáles recordaste, para determinar expresiones algebraicas equivalentes.
   c) Anota cualquier duda que tengas para consultarla con tu docente.

Portafolio de evidencias

Incluye para tu portafolio de evidencias la solución del problema Un reto más donde especifiques claramente las dos expresiones algebraicas equivalentes que expresa el área del rectángulo de color azul.

Para leer

Matemáticas Recreativas

Y. I. PERELMAN

33. ¿Cuántos años tiene?

A un aficionado a los rompecabezas le preguntaron cuántos años tenía. La contestación fue compleja:

—Tomad tres veces los años que tendré dentro de tres años, restadles tres veces los años que tenía hace tres años y resultará exactamente los años que tengo ahora. ¿Cuántos años tiene?

Solución.

La solución aritmética es bastante complicada, pero el problema se resuelve con facilidad si recurrimos al álgebra y planteamos una ecuación. Designaremos con la letra x el número de años buscado. La edad tres años después se expresará por $x + 3$, y la edad de 3 antes por $x - 3$. Tenemos la ecuación:

$$3(x + 3) - 3(x - 3) = x$$

Despejando la incógnita, resulta $x = 18$. El aficionado a los rompecabezas tiene ahora 18 años.

Comprobémoslo: Dentro de tres años tendrá 21; hace tres años, tenía sólo 15. La diferencia

$$3 \cdot 21 - 3 \cdot 15 = 63 - 45 = 18$$

es decir, igual a la edad actual.

Fuente: http://www.librosmaravillosos.com/matematicarecreativa/

Diagonales en polígonos

Aprendizaje esperado: Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Contenido: Número de diagonales desde un vértice; Número de diagonales en total.

Para arrancar

1. Reúnete con un compañero y hagan lo que se indica.
   a) Con su compás y regla reproduzcan en su cuaderno la FIGURA 14.1.
   b) Unan los puntos *PQ*, *QR*, *RS*, *ST*, *TU* y *UP* y respondan las siguientes preguntas.
      - ¿Qué nombre recibe el polígono que se forma? ______
      - ¿Cuántos **vértices** tiene? ______
      - ¿Cuántos lados tiene? ______

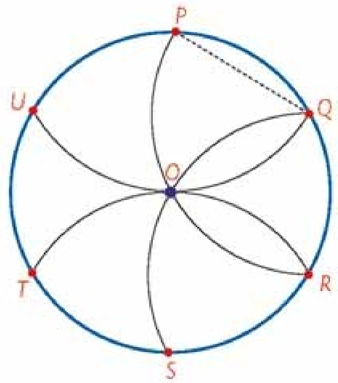


FIGURA 14.1 Trazo de polígono con compás y regla.

2. Reúnete con un compañero y hagan lo que se pide.
   a) Completen la TABLA 14.1.

Polígono regular	Número de lados	Número de vértices
Triángulo equilátero		
	4	
		5
	10	

TABLA 14.1 Número de lados y vértices de polígonos regulares.

   b) Respondan las siguientes preguntas.
      - ¿Cómo son los lados y los ángulos en los polígonos regulares?
      - ¿Cómo definen a un polígono regular?
   c) Comparen sus respuestas con las de otras parejas y corrijan en caso de ser necesario.

LECCIÓN 14

Reto

1. Integren a un compañero más y resuelvan el siguiente reto.

Observen el polígono TROMPAS y sus **diagonales** trazadas, cuéntenlas y escriban cuál fue su estrategia para contarlas y cuántas diagonales contaron.

Número de diagonales: ______

Estrategia: ______

______

______

Comenten con otros equipos sus estrategias y resultados. En caso de ser necesario, expongan sus dudas en el grupo.

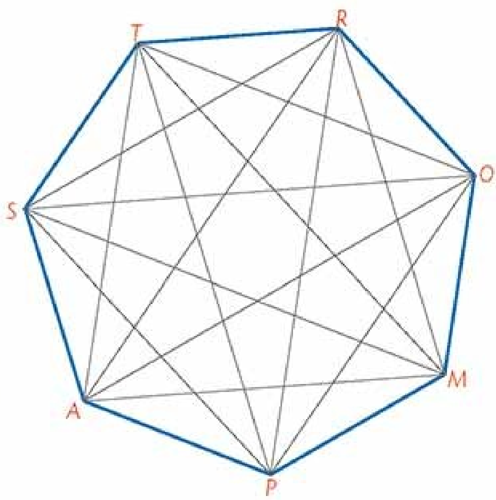


FIGURA 14.2 Polígono con sus diagonales.

Glosario

Vértice. Punto en que concurren los dos lados de un ángulo.
Diagonal. Segmento que une dos vértices no consecutivos.

Pistas

1. Con los mismos equipos del Reto, intenten lo siguiente, como ayuda para resolver el reto:
   - En los **polígonos convexos** con 3, 4, 5 y 6 lados de la FIGURA 14.3, tracen y cuenten todas las diagonales que se forman en cada caso.
   - Escriban debajo de cada figura el número de lados y el número de diagonales que pueden trazar desde un mismo vértice.

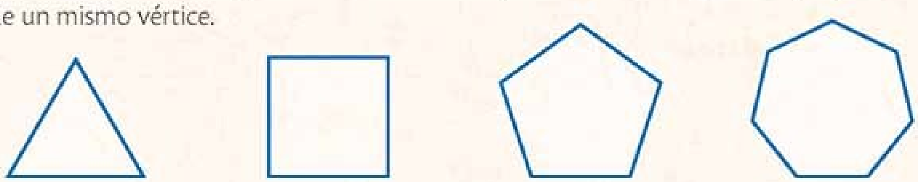


FIGURA 14.3 Polígonos convexos.

   - ¿Alguna diagonal quedó fuera del polígono?
   - ¿Alguna diagonal cortó a cualquiera de los lados?
2. Cuenten cuántas diagonales parten de cada vértice y expliquen cómo va creciendo en los diferentes polígonos el número de diagonales que se pueden trazar por vértice.
   - ¿Cómo pueden saber cuántas diagonales parten de cada vértice en un polígono de 10 lados?
   - ¿Qué relación hay entre el número de lados del polígono y el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice?
3. Tracen las diagonales de los **polígonos cóncavos** de la FIGURA 14.4.

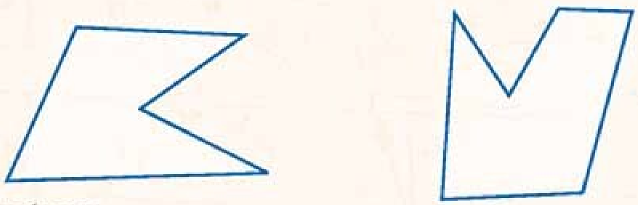


FIGURA 14.4 Polígonos cóncavos

   - ¿Cuántas diagonales partieron de cada vértice en el pentágono y cuántas en el hexágono?
   - ¿Alguna diagonal quedó fuera del polígono?
   - ¿Alguna diagonal cortó a cualquiera de los lados?
   - Escriban en su cuaderno algunas diferencias entre los polígonos cóncavos y los convexos.
4. Compartan con otras parejas sus resultados y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Para analizar

Un nuevo reto

1. Reúnete con dos compañeros, organicen la información necesaria para indicar el número de vértices, el número de diagonales que se pueden trazar por un mismo vértice y el total de diagonales de las siguientes figuras (sin importar si sus lados son desiguales).

Triángulo, cuadrilátero, heptágono, decágono y dodecágono.

Glosario

Polígono convexo. Figura geométrica con ángulos interiores menores a 180°.

Polígono cóncavo. Polígono que tiene al menos un ángulo interior mayor a 180°

Se vale

Colaboración

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan cuántas diagonales se pueden trazar en un polígono desde un vértice y en total.

a) Completen con base en la información que obtuvieron, las siguientes afirmaciones.

- En los polígonos, el número de vértices es igual que el número de ________.
- Al relacionar el número de lados del polígono con el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice, se observa que es igual al número de ________ menos ________.
- Cada diagonal trazada toca ________ vértices.

b) Expliquen cómo se puede calcular el número total de diagonales de un polígono, si conocemos:

- el número de lados y vértices del polígono. ________________________________
- el número de diagonales que se pueden trazar desde cada uno de sus vértices. ________________________________

c) Comprueben el procedimiento que hayan encontrado —dibujando el polígono y trazando sus diagonales— para un polígono de ocho lados.

d) Expongan su trabajo ante el grupo y, en caso de dudas, consulten con su docente.

Formalización

1. Observen la información que organizaron anteriormente y vean la relación que hay entre el número de lados de un polígono convexo y el número de diagonales que se pueden trazar desde cada uno de sus vértices, podrán ver que:

a) En un polígono convexo, cuando se traza una diagonal desde uno de sus vértices hay ________________ vértices a los que no puede llegar o no se podrá trazar la diagonal, estos son: los dos vértices contiguos al vértice del que parte la diagonal. Observa la **FIGURA 14.5**.

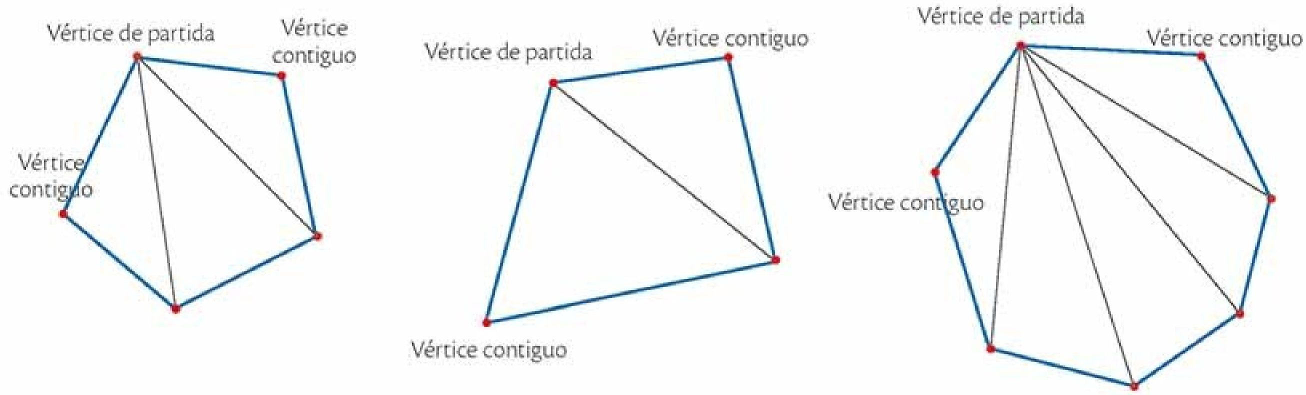


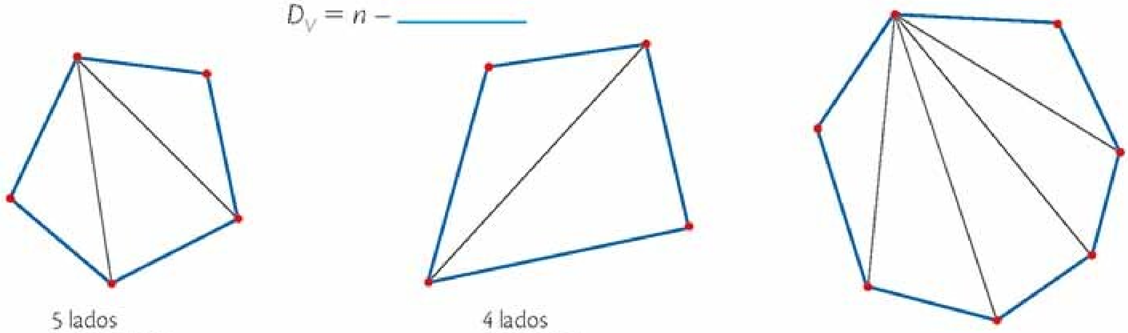
FIGURA 14.5 Trazo de diagonales desde un vértice.

b) Es por esto, que el total de diagonales que se pueden trazar desde un vértice en un polígono, como ya deben haberlo deducido, está dado por la fórmula:

Diagonales desde un vértice (D_V) = Número de lados del polígono – ____________

Si n representa cualquier número de lados de un polígono, entonces, el número de diagonales desde un vértice está dada por la siguiente fórmula:

$$D_V = n - \_\_\_\_\_\_$$



5 lados
2 diagonales

4 lados
1 diagonal

7 lados
4 diagonales

FIGURA 14.6 Diagonales trazadas desde un vértice.

- ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en un triángulo? Expliquen su respuesta.

____

____

c) Para calcular el número total de diagonales que se pueden trazar en un polígono, consideren que: Si desde un vértice se pueden trazar diagonales, al multiplicar por el número de vértices:

- ¿Se obtiene el número correcto de diagonales? ______ Expliquen. ______

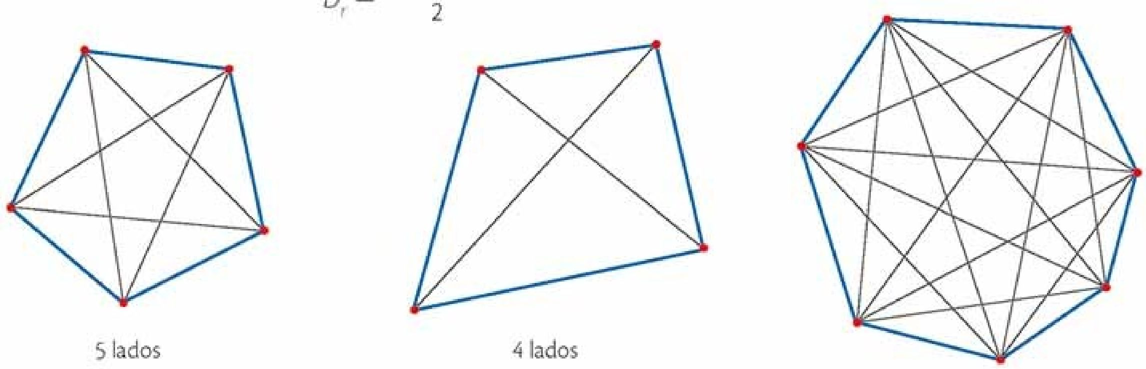
  ____

- Como cada diagonal toca dos vértices, ¿cómo obtienen el número total y correcto de diagonales? ____________________

  ____

$$\text{Diagonales totales} = \frac{(\text{Número de lados}) \times (\text{Número de lados del polígono} - \text{tres})}{\text{dos}}$$

$$D_r = \frac{n(n-3)}{2}$$



5 lados

$$D_r = \frac{5(5-3)}{2} = 5$$

4 lados

$$D_r = \frac{4(4-3)}{2} = 2$$

7 lados

$$D_r = \frac{7(7-3)}{2} = 14$$

FIGURA 14.7 Diagonales totales en un polígono.

2. Comprueben este procedimiento —dibujando el polígono y trazando sus diagonales— para un polígono de ocho lados.

Con lo aprendido hasta aquí, no debería haber algún problema para resolver el problema del reto.

Expongan sus dudas y comentarios ante el grupo. Escuchen con atención a sus compañeros y en caso necesario aporten ideas para hacer más claro el conocimiento.

¡A practicar!

1. Dibuja un polígono y sus diagonales, después indícale a un compañero cuántas diagonales tiene por vértice, para que te indique de qué polígono se trata.
2. Dibuja un polígono y sus diagonales, después indícale a un compañero cuántas diagonales tiene en total, para que te indique de qué polígono se trata.
3. ¿Cómo puedes saber cuántos lados tiene un polígono, si de cada vértice se pueden trazar 6 diagonales? ____________________

4. ¿Cómo puedes saber cuántos lados tiene un polígono, si en total se le pueden trazar 35 diagonales? ____________________

5. ¿Cuántas diagonales tiene en total el polígono del reto? ____________________

En equipos de tres integrantes comparen sus respuestas y en caso de que no concuerden, revisen para saber si hubo algún error.

Para terminar

p

1. Reúnete con un compañero y contesten las siguientes preguntas.
   a) ¿Cómo se calculan en un polígono las diagonales que parten de un vértice?
   b) ¿Cómo se calculan en un polígono el total de las diagonales que se le pueden trazar?
   c) ¿Por qué a un triángulo no se le pueden trazar diagonales?
   d) ¿Por qué en la fórmula para calcular el total de diagonales que se pueden trazar a un polígono se divide entre dos?

Portafolio de evidencias

Elige para tu portafolio de evidencias algún trabajo sobre el número de diagonales que se pueden trazar en un polígono.

2. Recuperen lo aprendido en la lección y en caso necesario corrijan o comenten con sus compañeros y maestro las dudas que tengan.

En tu cuaderno escribe brevemente qué conocimientos adquiriste con la lección respecto del trazo de diagonales en polígonos y qué dudas tienes. Compara con lo escrito por otros compañeros y, en caso necesario, consulten con su maestro.

TIC

Realicen en equipo el siguiente ejercicio.

Pueden descargar un *software* de geometría gratuito, con su manual en español, en la siguiente liga: www.geogebra.org.

1. Abran una hoja de trabajo en GeoGebra.

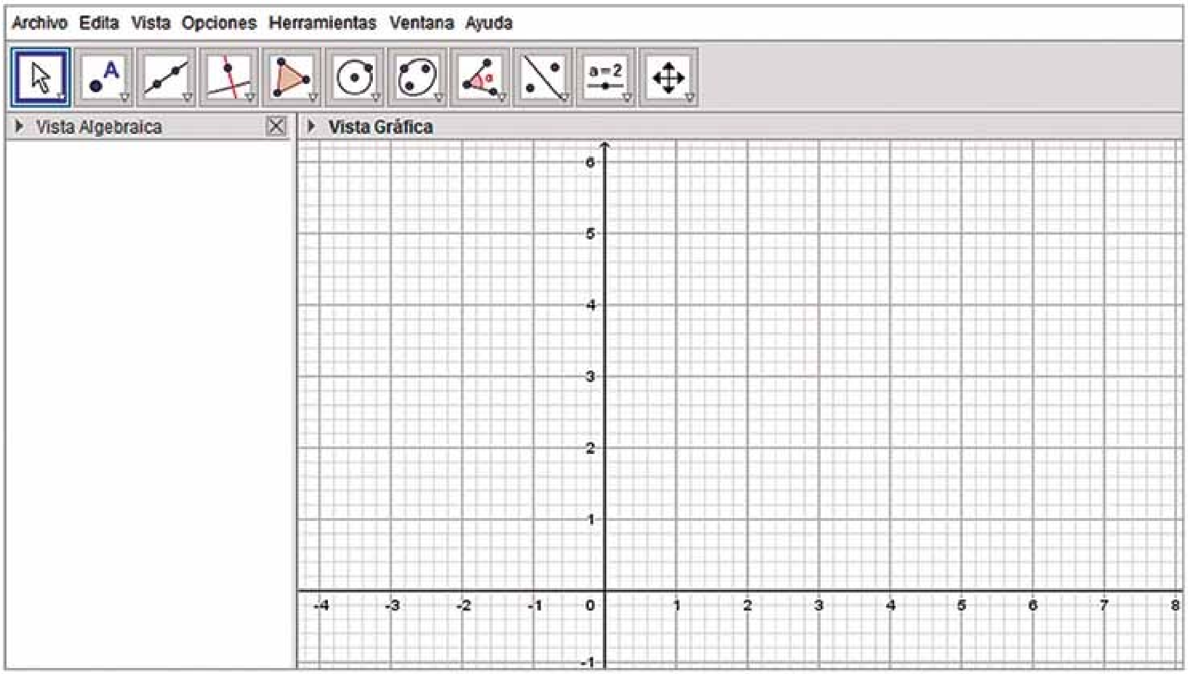


FIGURA 14.8 Aspecto de la hoja de trabajo en GeoGebra.

2. Con clic derecho en el ratón eliminen la cuadrícula y los ejes de coordenadas. Cierren también la vista algebraica haciendo clic en la X.

FIGURA 14.9 Eliminación de la cuadrícula en la hoja de trabajo.

3. Elige la opción de deslizador y configúralo para que varíe entre 3 y 8 y se llame "n".

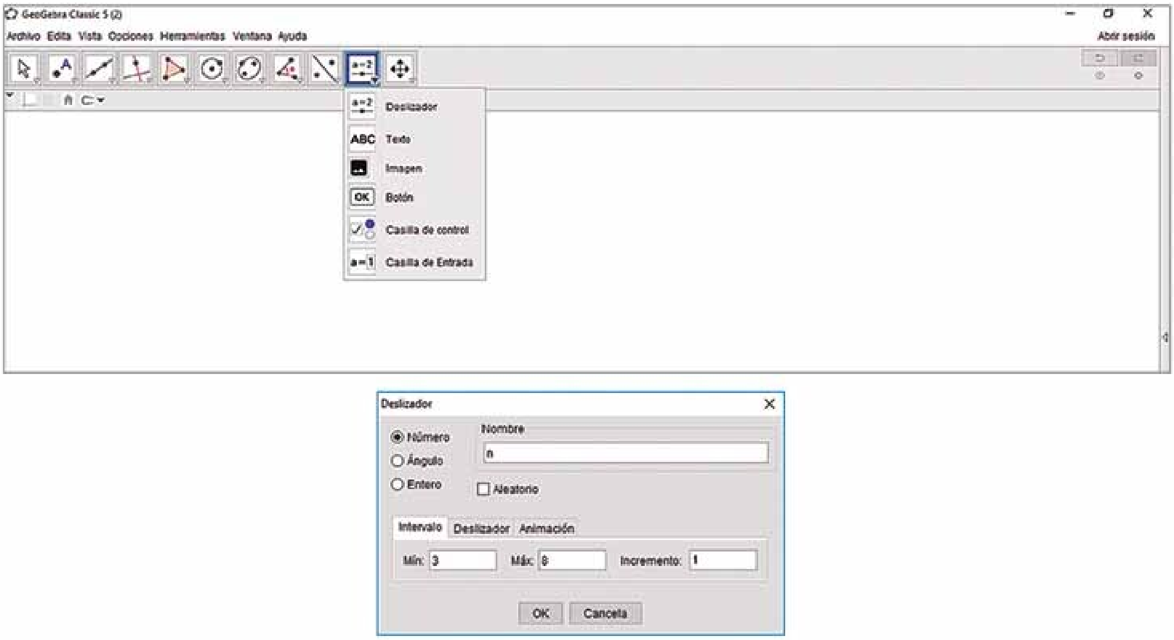


FIGURA 14.10 Opción de deslizador activada.

Debe quedar la pantalla como la siguiente.

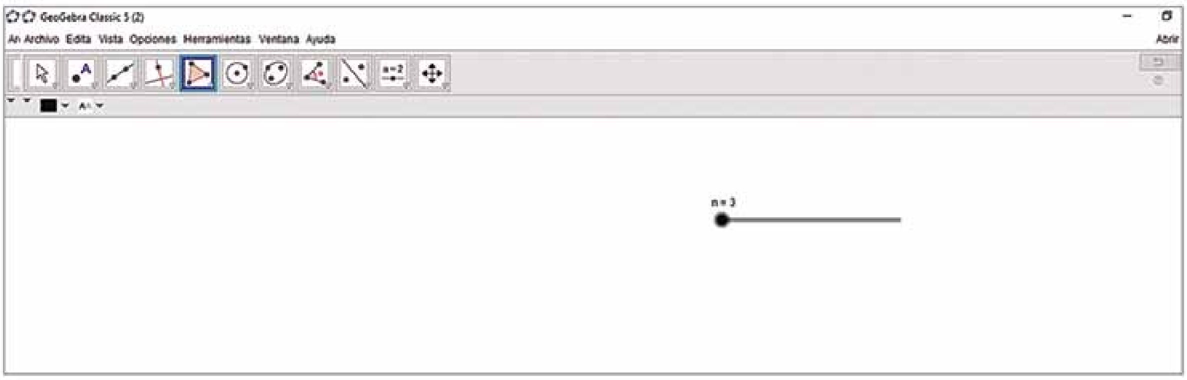


FIGURA 14.11 Deslizador en $n = 3$.

4. Ahora elige el ícono de polígono regular.

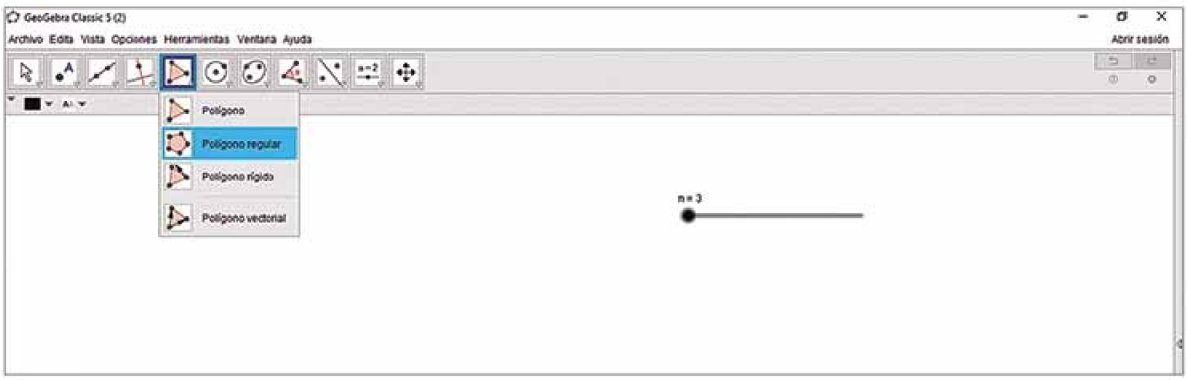


FIGURA 14.12 Selección de la opción de polígono regular.

5. En la opción vértices, escribe "n" y aparecerá en pantalla un triángulo, mueve el deslizador de uno en uno hasta el 8 y observa los polígonos que se forman cada vez.
6. Cuando llegues al 8 aparecerá un octágono, traza todas sus diagonales usando la opción de segmento, debe quedar así:

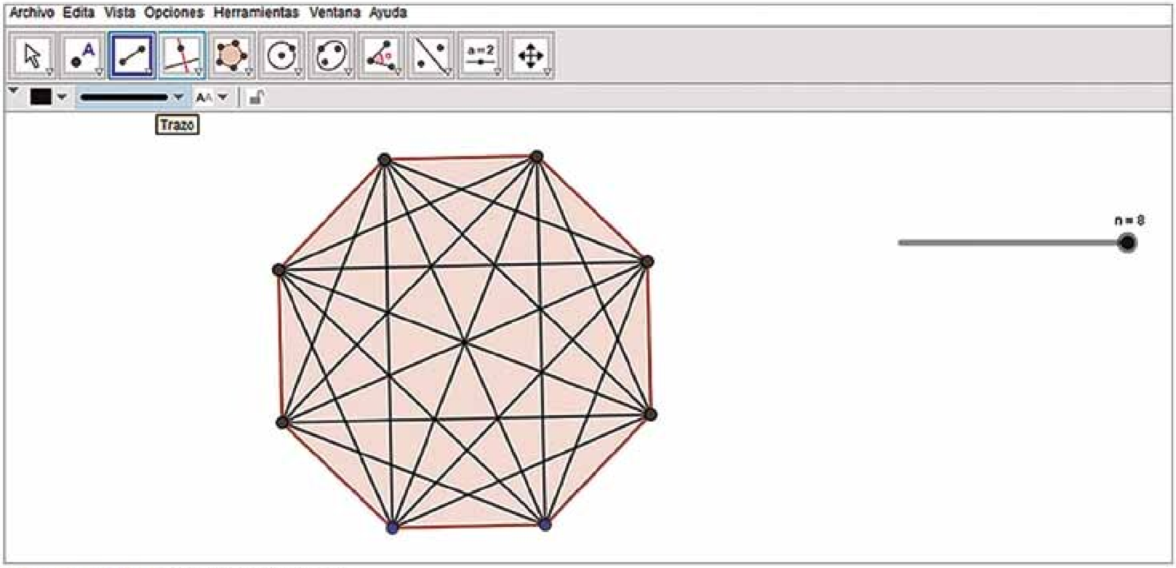


FIGURA 14.13 Trazo de las diagonales.

7. Ahora mueve el deslizador de uno en uno y observa cada vez los polígonos que se forman.

   Comprueben con la ayuda del *software*:

   - Que en cada polígono formado las diagonales que parten de un vértice corresponden a la fórmula aprendida en la lección.

Comenten en el grupo este ejercicio y en caso de dudas traten de resolverla entre los estudiantes de la clase.

Para leer

El uso de las diagonales en la construcción, es un recurso muy común para reforzar muros.

FIGURA 14.14 Edificio reforzado con estructuras metálicas con barras diagonales.

Observa si en tu escuela, en tu casa o en tu comunidad se han usado diagonales para reforzar alguna construcción.

Ángulos en polígonos

Aprendizaje esperado: Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Contenido: Suma de ángulos interiores en polígonos; Ángulos interiores, exteriores y Ángulo central; Relación entre los ángulos central, interior y exterior.

Para arrancar

1. Lee la situación y haz lo que se pide.

Miriam dice que identificando algunos ángulos puede, en algunos casos, compararlos con otros visualmente y relacionarlos correctamente con su medida.

a) Sin medir, relaciona con líneas cada ángulo de la **FIGURA 15.1** con la medida que le corresponda.

90° 30° 60° 120° 180°

FIGURA 15.1 Ángulos de diferentes medidas.

b) Verifiquen sus respuestas con el transportador.

- ¿Tiene razón Miriam? ____________________

Compara tu estrategia y tus respuestas grupalmente y, en caso de dudas, pregunten a su profesor.

Reto

e

1. Reúnete con dos compañeros y resuelvan el siguiente reto.

Isaac reta a Caro y a Cori a medir ángulos en polígonos y a sumarlos con rapidez. Ellas deben medir y sumar los ángulos interiores de varios polígonos convexos. Isaac les dice que dirá el resultado de la suma sin ver siquiera el polígono que Caro y Cori midan, siempre y cuando le digan el número de lados del polígono.

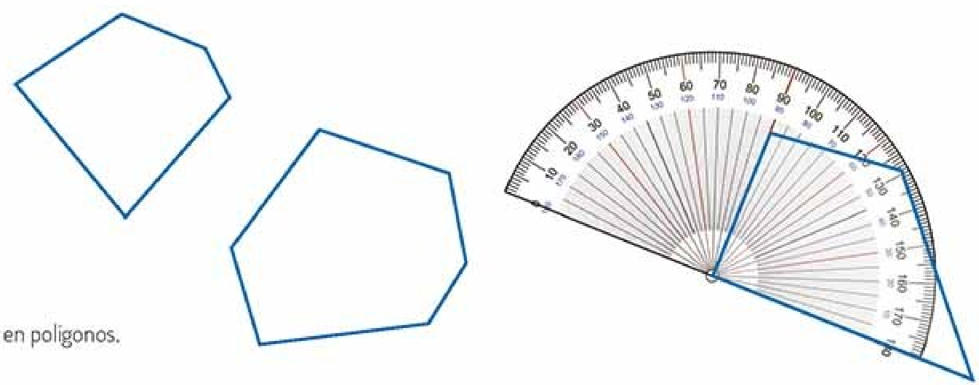


FIGURA 15.2 Medición de ángulos en polígonos.

Después de probar con varias figuras, Isaac siempre acierta al resultado.

a) ¿Habrá alguna manera para que Isaac conozca la suma, sabiendo solamente el número de lados del polígono y sin necesidad de usar transportador ni calculadora?

b) Comenten entre ustedes y después, con otras parejas, indaguen la forma en que Isaac logra saber la suma de los ángulos interiores de los polígonos convexos, aun sin verlos y solamente conociendo el número de lados.

c) Escuchen las opiniones de otros compañeros y equipos y, en caso necesario, complementen los comentarios.

Pistas

1. Reúnete con otros compañeros, lean lo siguiente y contesten las preguntas.

Una estrategia para conocer la manera con que Isaac sabe anticipadamente la medida, puede ser medir con cuidado los ángulos internos de los polígonos, después sumarlos y hacer un registro para ver si es posible descubrir alguna regularidad. Completen las tablas y contesten las preguntas.

a) Midan los ángulos interiores de los triángulos de la FIGURA 15.3, registren cada medida en la TABLA 15.1 y súmenlas.

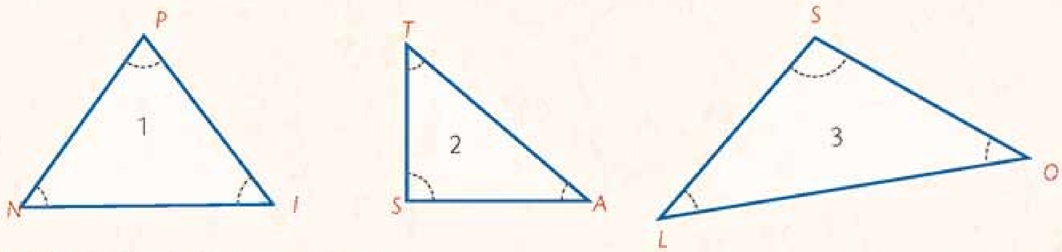


FIGURA 15.3 Ángulos interiores en triángulos.

Triángulo	1			2			3		
Ángulos	*PIN*	*INP*	*NPI*	*TAS*	*AST*	*STA*	*SOL*	*OLS*	*LSO*
Medida									
Suma									

TABLA 15.1 Suma de ángulos interiores en los triángulos de la figura 15.3.

- ¿Qué observan sobre la suma de los ángulos interiores de los triángulos? ______________________________
- ¿Pasará lo mismo con cualquier triángulo? ______________________________

b) Usen su transportador y escriban en la TABLA 15.2 la medida de cada uno de los ángulos interiores en cada cuadrilátero y su suma.

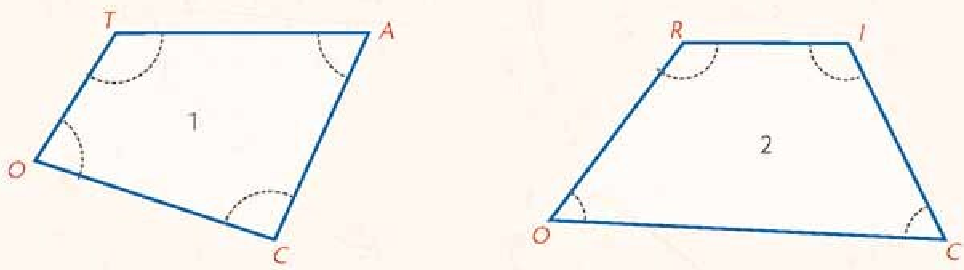


FIGURA 15.4 Ángulos interiores en cuadriláteros.

Cuadrilátero	1				2			
Ángulos	*TAC*	*ACO*			*RIC*			
Medida								
Suma								

TABLA 15.2 Suma de ángulos interiores en los cuadriláteros de la figura 15.4.

- ¿Qué observan sobre la suma de los ángulos interiores de los cuadriláteros?

  ____

- ¿Pasará lo mismo con cualquier cuadrilátero convexo?

  ____

c) Usen su transportador y escriban en la **TABLA 15.3** la medida de cada uno de los ángulos interiores en cada pentágono y su suma.

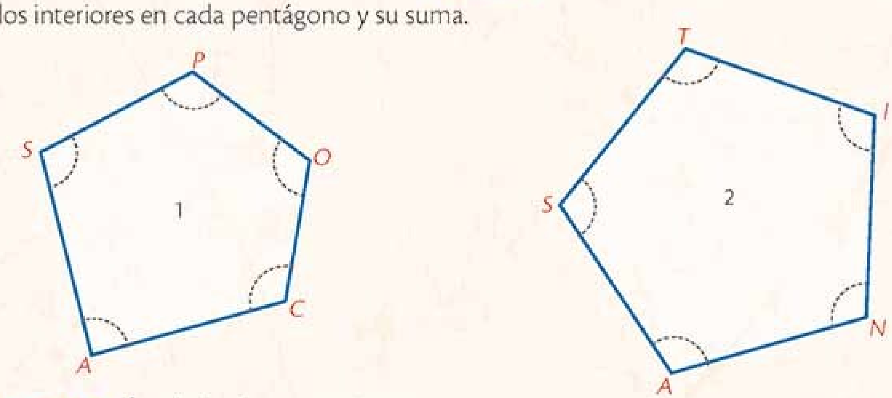


FIGURA 15.5 Ángulos interiores en pentágonos.

Pentágono	1					2				
Ángulos										
Medida										
Suma										

TABLA 15.3 Suma de ángulos interiores en los pentágonos de la figura 15.5.

- ¿Qué observas sobre la suma de los ángulos interiores de los pentágonos?

  ____

- ¿Pasará lo mismo con cualquier pentágono? ______________________________

  ____

d) Encuentren alguna regularidad en sus tablas y contesten:

- ¿Cómo va aumentando la suma de la medida de los ángulos interiores de los polígonos? ______________________________
- ¿Cuántos sumarán los ángulos interiores de un hexágono? ______________________________ ¿Por qué? ______________________________
- ¿Cuánto sumarán las medidas de los ángulos interiores de un decágono (10 lados)? ______________ ¿Por qué? ______________________________

- ¿Cuánto sumarán las medidas de los ángulos interiores de un polígono con *n* número de lados? ______________ ¿Por qué? ______________
____
- Si ya saben cuál fue la estrategia que usó Isaac, descríbanla en su cuaderno.

Investiguen cuánto suman los **ángulos centrales** y los **ángulos externos** en: un triángulo equilátero, un cuadrado y en un hexágono regular (lados iguales)

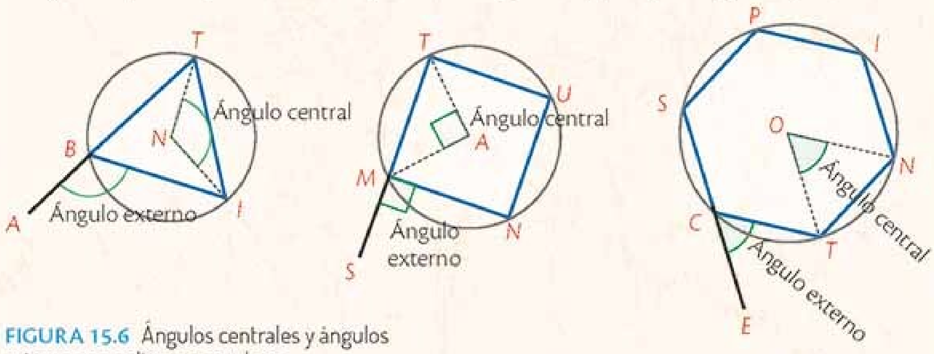


FIGURA 15.6 Ángulos centrales y ángulos externos en polígonos regulares.

Compartan con otras parejas sus resultados y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Glosario

Ángulo central. Ángulo formado con dos radios.

Ángulo externo a un polígono. Es el ángulo formado por un lado de un polígono y la prolongación del lado adyacente.

Para analizar

Un nuevo reto

1. Reúnete con otros compañeros, analicen los ángulos central, interno y externo de cada polígono y sin medirlos indiquen la medida de cada uno. Finalmente usen un transportador para corroborar sus respuestas.

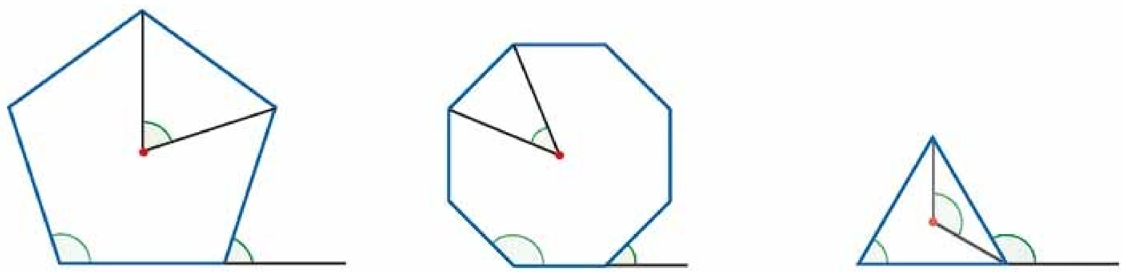


FIGURA 15.7 Ángulos centrales, ángulos internos y ángulos externos en polígonos regulares.

a) Escriban en la TABLA 15.4 la medida de los ángulos central y externo de cada polígono.

	Pentágono	Octágono	Triángulo
Ángulo central			
Ángulo externo			

TABLA 15.4 Medidas de ángulos centrales y ángulos eternos de los polígonos de la figura 15.7.

b) Analicen los resultados de la tabla y respondan.

- ¿Qué relación encuentran entre estos dos ángulos? ______________________
- Si se toman un ángulo exterior y el interno adyacente a él ¿qué tipo de ángulo se forma? ______________________
- ¿Cuánto mide un ángulo colineal o también llamado ángulo llano? ______________________
- ¿Cómo pueden calcular la medida de un ángulo interno si conocen la medida del ángulo exterior? ______________________

c) Escriban brevemente las relaciones que encuentren entre los ángulos central, interno y externo en los polígonos regulares. ______________________

d) Expongan su trabajo ante el grupo y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Se vale

Colaboración
Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan algunas relaciones que existen entre los ángulos centrales, internos y externos en los polígonos convexos.

Formalización

En un polígono, los ángulos interiores están formados por la abertura de dos lados consecutivos.

Seguramente notaron que la suma de la medida de los ángulos interiores de cualquier triángulo es 180°

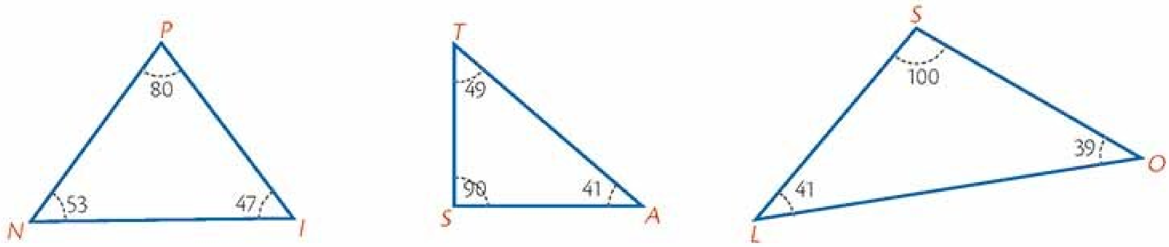


FIGURA 15.8 Ángulos interiores de tres triángulos.

Tomando en cuenta que los cuadriláteros pueden dividirse en dos triángulos, trazando una de sus diagonales.

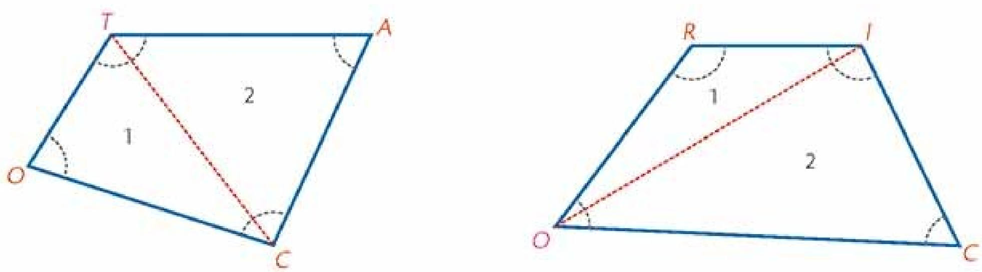


FIGURA 15.9 División de cuadriláteros en triángulos.

- Si cada triángulo suma 180°, entonces, ¿cuánto sumarán la medida de los ángulos interiores de un cuadrilátero?:

Tracen en los pentágonos de la **FIGURA 15.10** sus diagonales partiendo del mismo vértice.

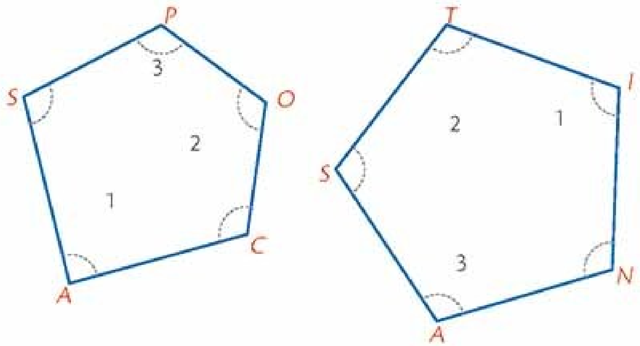


FIGURA 15.10 Pentágonos.

- ¿En cuántos triángulos quedó dividido cada pentágono? ______
- ¿Cuánto sumarán los ángulos interiores de un pentágono? ______
- ¿En cuántos triángulos se dividirá un hexágono si trazan sus diagonales partiendo del mismo vértice? ______
- ¿Cuánto sumarán los ángulos interiores de un hexágono? ______

Termina de llenar la **TABLA 15.5**

Polígono	Número de lados	Operación para calcular el total de triángulos formados al trazar las diagonales de un vértice	Triángulos formados al trazar las diagonales de un vértice
Cuadrado			
		$(5-2)$	
			4
De n lados	n		

TABLA 15.5 Número de triángulos formados desde un vértice en diferentes polígonos.

- Encierra la expresión que permite calcular el número de triángulos que se forman en un polígono al trazar las diagonales por un vértice.

$2(n-2)$ $\quad (n-2)$ $\quad (n-n)$ $\quad (2n-n)$

Si la suma de las medidas de los ángulos interiores de cada triángulo formado es 180°, entonces, ¿cuánto sumarán los ángulos interiores de un polígono de n lados?

- Encierra la expresión que permite calcular dicha suma.

$180+(n-2)$ $\quad 180(n-n)$ $\quad 180(n-2)$ $\quad 180(2n-n)$

Comprueba que las expresiones que encerraste son correctas. Prueba con algunos polígonos y compara tus respuestas con las de otros estudiantes.

- Calcula la medida de cada uno de los ángulos interiores de polígonos regulares con 3, 4, 6 y 8 lados con la fórmula: $180° - \frac{360°}{n}$.

Compara tus resultados con los que aparecen en la **FIGURA 15.11**.

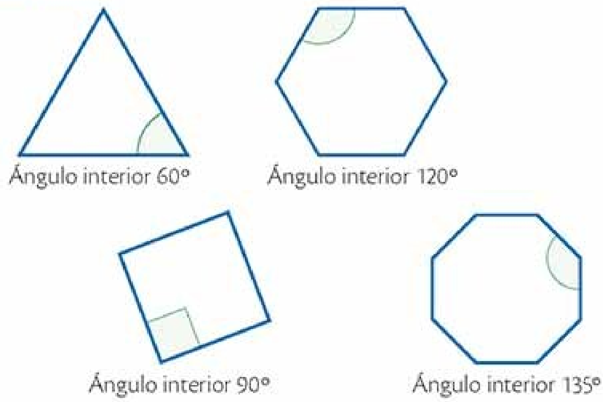


FIGURA 15.11 Medida del ángulo interior de algunos polígonos regulares.

Escribe brevemente en tu cuaderno por qué para calcular la medida de cada uno de los ángulos interiores de un polígono regular, se puede usar la fórmula: $180° - (360°)/n$.

Para conocer las relaciones entre los ángulos central interior y exterior de los polígonos, es necesario partir de que en un círculo, el ángulo formado por dos radios es llamado ángulo central.

El arco que abarca mide lo mismo que el ángulo central. Es decir, es el ángulo que se genera al girar un radio alrededor del centro hasta otro punto de la circunferencia.

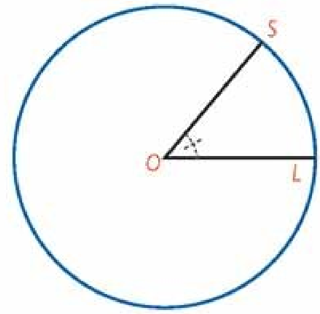


FIGURA 15.12 Ángulo central en un círculo.

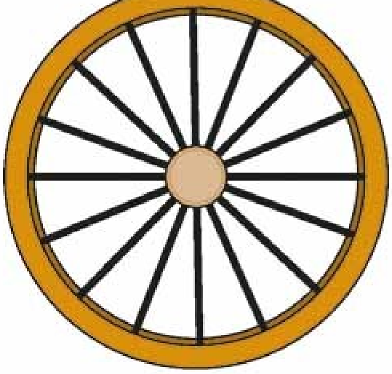


FIGURA 15.13 Rueda de carreta.

Para dividir un círculo en arcos iguales hay que dividir sus 360° entre el número de cortes que se desean. Por ejemplo, era común que las ruedas de una carreta tuvieran 16 divisiones. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos centrales de la rueda que se muestra en la FIGURA 15.13?

Si el problema consiste en trazar polígonos regulares usando ángulos centrales, bastará dividir 360° entre el número de lados del polígono que queremos.

Los ángulos exteriores están formados por un lado de un polígono y la prolongación del lado adyacente. En los polígonos regulares, y como lo dedujeron anteriormente, los ángulos exteriores miden lo mismo que el ángulo central, de tal forma que si se conoce la medida de un ángulo central, es posible conocer la medida de un ángulo exterior.

- Indiquen la medida de los ángulos marcados en los polígonos de la FIGURA 15.14.

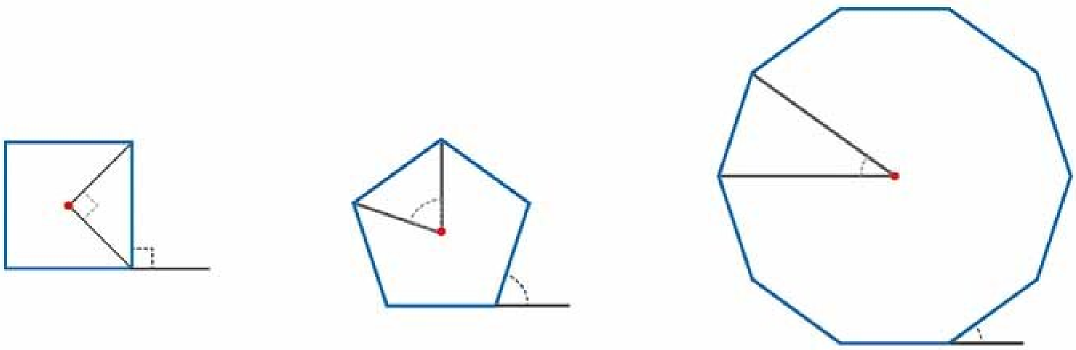


FIGURA 15.14 Ángulo central y exterior de polígonos regulares.

- Escriban en su cuaderno brevemente, cómo calcularon la medida de los ángulos.

Los ángulos interiores son adyacentes a los ángulos externos y, en este caso forman ángulos colineales o llanos, que miden 180°, por lo que, para conocer su medida bastará con calcular cuánto le falta al ángulo exterior para sumar lo de un ángulo llano.

- Escribe la medida de los ángulos marcados en cada polígono de la FIGURA 15.15.

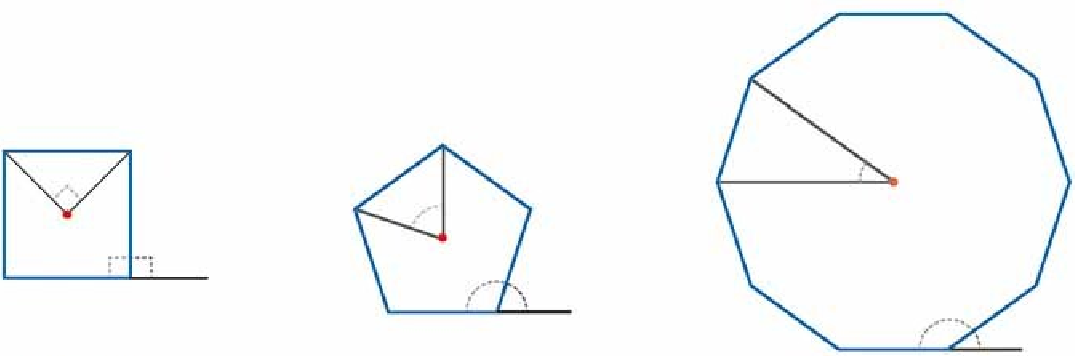


FIGURA 15.15 Ángulo central, interior y exterior de polígonos regulares.

Para conocer y ejercitar un poco más sobre los ángulos en los polígonos regulares, entra a la siguiente página:

http://proyectodescartes.org/uudd/materiales_didacticos/regularidades-JS/regularidades_3.htm. Sitio consultado el 24 de marzo de 2018.

Vuelve a leer el Reto y Un nuevo reto, soluciónalos y compara tu respuesta con la que diste al inicio de la lección.

¡A practicar!

1. Se han subdividido en triángulos algunos polígonos a partir de un vértice, resultando el número de triángulos que se indica en la TABLA 15.6. Escribe el nombre del polígono del cual se trata.

Nombre del polígono	Triángulos que se forman al trazar las diagonales desde un mismo vértice
	2 triángulos
	5 triángulos
	4 triángulos

TABLA 15.6 Triángulos que se forman al trazar diagonales desde un vértice en polígonos.

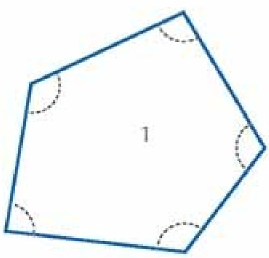
Describe brevemente en tu cuaderno cómo supiste de cuál polígono se trataba.

2. Completa la TABLA 15.7.

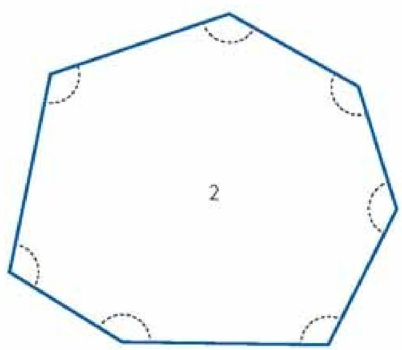
Polígono regular	Ángulo central	Ángulo interior	Ángulo externo
Cuadrado			
	60°		
		108°	
			120°

TABLA 15.7 Ángulo central, interior y exterior de polígonos regulares.

3. Calcula la suma de la medida de los ángulos interiores de los siguientes polígonos.



Suma de la medida de ángulos interiores ______



Suma de la medida de ángulos interiores ______

FIGURA 15.16 Suma de ángulos interiores de polígonos.

Para terminar

1. Reúnete con un compañero y hagan lo que se indica en cada inciso.
   a) Contesten las siguientes preguntas.
      - ¿Cómo definen un ángulo interno? ____________________
      - ¿Cuánto suman los ángulos centrales en cualquier polígono? ____________________
      - ¿Habrá un polígono regular en el que sus ángulos centrales, internos y externos midan lo mismo? Expliquen su respuesta. ____________________

   b) Repasen la lección para verificar las respuestas, comenten grupalmente las preguntas y respuestas que estuvieron erróneas.

Portafolio de evidencias

Elige para tu portafolio de evidencias, la solución al reto y otro trabajo que involucre la relación entre los ángulos: central, interno y externo en polígonos.

2. En tu cuaderno escribe brevemente qué conocimientos adquiriste con la lección respecto de algunas relaciones que existen entre los ángulos centrales, internos y externos en los polígonos convexos y qué dudas tienes. Compara con lo escrito por otros compañeros o compañeras y en caso necesario consulten con su maestro.

3. Dibuja un segmento en una hoja de papel y con ayuda de dos espejos de 5 por 10 centímetros aproximadamente, puedes generar muchos polígonos. Coloca los espejos unidos con cinta adhesiva, como se muestra en la FIGURA 15.17, y cambia el ángulo de abertura.

   Coloca un transportador encima de los espejos, de tal forma que puedas ver el ángulo central. Registra el nombre de algunos polígonos que observes y el ángulo con el que se formó. Compara las figuras que encontraste con las que encontraron tus compañeros.

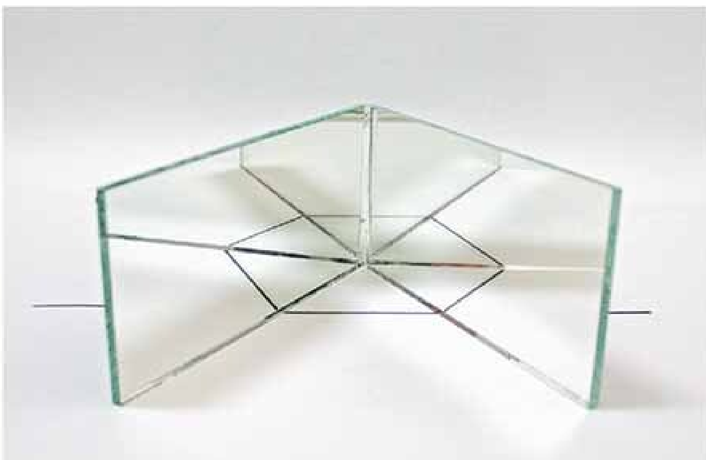


FIGURA 15.17 Espejos que forman polígonos.

TIC

Construye una hoja electrónica de cálculo que calcule la medida de ángulos centrales, internos y externos en polígonos regulares.

1. En las celdas amarillas introduce el número de lados del polígono.
2. Escribe las fórmulas que se muestran para que la hoja calcule automáticamente.
   - ¿Cuál es el menor número de lados que puedes introducir en las celdas amarillas? ¿Por qué?
   - ¿Por qué las fórmulas para calcular la medida de los ángulos centrales son iguales a las de los ángulos externos?
3. Escribe datos para diferentes polígonos y observen similitudes y diferencias.
4. Comenta en el grupo tus observaciones.

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Ángulos en polígonos regulares convexos**						
2	**Número de lados del polígono**	**Ángulo central**	**Ángulo interno**	**Ángulo externo**	**Suma de ángulos centrales**	**Suma de ángulos internos**	**Suma de ángulos externos (uno por vértice)**
3		=360/A3	=180-B3	=360/A3	=A3*B3	=C3*A3	=D3*A3
4		=360/A4	=180-B4	=360/A4	=A4*B4	=C4*A4	=D4*A4
5		=360/A5	=180-B5	=360/A5	=A5*B5	=C5*A5	=D5*A5
6		=360/A6	=180-B6	=360/A6	=A6*B6	=C6*A6	=D6*A6
7		=360/A7	=180-B7	=360/A7	=A7*B7	=C7*A7	=D7*A7
8		=360/A8	=180-B8	=360/A8	=A8*B8	=C8*A8	=D8*A8
9							
10							

FIGURA 15.18 Ángulos en polígonos regulares convexos en hoja de cálculo.

Construcción de polígonos

Aprendizaje esperado: Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Contenido: Resolver problemas de construcción de polígonos regulares con instrumentos geométricos a partir de diferentes datos

Para arrancar

p

1. Reúnete con un compañero, observen las siguientes figuras geométricas y el ángulo marcado en cada una.

En la **FIGURA 16.1** escriban el número 1 dentro del polígono que tiene marcado un ángulo central, el 2 para el que tiene marcado un ángulo interior y el 3 para el que tiene marcado un ángulo exterior.

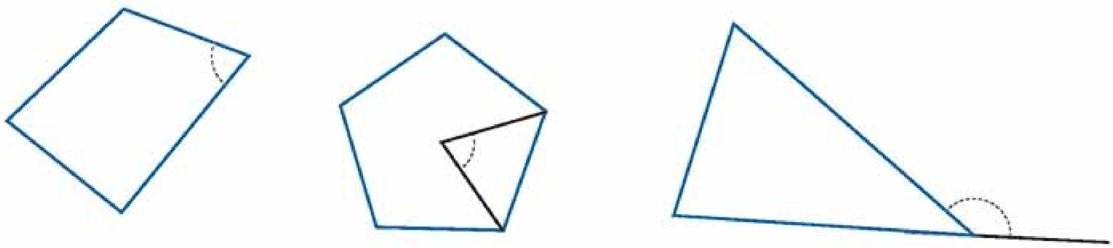


FIGURA 16.1

Reto

e

1. Resuelvan el siguiente reto:

- Observen la **FIGURA 16.2** en la que se muestra una manera de trazar un hexágono regular.
- Redacten en una hoja el procedimiento que se muestra. Decidan las medidas que usarán.
- Intercambien su redacción con la de otra pareja.
- Sigan las instrucciones que les entreguen y tracen en su cuaderno un hexágono regular.

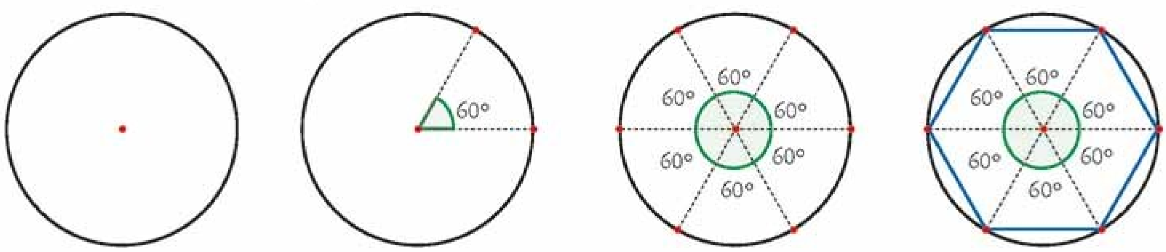


FIGURA 16.2

- Comenten con otros equipos en qué se basó el trazo del hexágono, expongan sus dudas en el grupo.

LECCIÓN 16

Pistas

p

1. Trabaja con tu pareja del reto, lean lo siguiente y contesten las preguntas.
   - ¿Cuánto miden y cuánto suman los ángulos centrales de los siguientes polígonos regulares?

Polígono	Medida de cada ángulo central	Suma de sus ángulos centrales
Triángulo		
Cuadrado		
Pentágono		
Hexágono		
Octágono		

Escriban en su cuaderno:

- ¿En que se parecen los polígonos de la tabla? ¿En qué son diferentes?
- Si quisieran trazar un decágono regular usando ángulos centrales, ¿de cuántos grados trazarían los ángulos? ¿Por qué?
- ¿Cómo trazarían un polígono regular de *n* lados usando la medida del ángulo central?
- Si solamente supieran la medida del ángulo interior, ¿cómo trazarían el polígono?
- Si solamente supieran la medida del ángulo exterior, ¿cómo trazarían el polígono?
- ¿Es posible trazar un polígono regular si se conoce la medida de su ángulo central, interior o exterior?
- Si además de la forma del polígono, les interesa su tamaño, ¿qué otro dato deben conocer?

Compartan con otras parejas sus conclusiones y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Para analizar

Un nuevo reto

e

1. Reúnete con dos compañeros y realicen lo que se indica.
   - **a)** En su cuaderno, tracen un polígono regular de tal manera que utilicen la medida de un lado y la del ángulo central, la del interno o la del externo.
   - **b)** Indiquen a otro equipo solamente el dato de uno de sus ángulos y la medida de un lado y pidan que lo trace.
   - **c)** Comparen los polígonos para comprobar que son **congruentes**.
   - **d)** Expongan su trabajo ante el grupo y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Se vale

Colaboración

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros o compañeras para que todos comprendan cómo es posible trazar un polígono regular, si se conoce la medida de su ángulo central, interno o externo.

Formalización

En un círculo, el ángulo central mide lo mismo que el arco que abarca, por lo que para dividir un círculo en arcos iguales hay que dividir sus 360° entre el número de cortes que se desean.

Glosario

Congruentes. Dos polígonos son congruentes si tienen todos sus lados iguales y ángulos iguales.

Por ejemplo, observa el trazo de un dodecágono regular, es decir, un polígono con 12 lados congruentes.

Se divide 360° ÷ ______ = 30°, por lo que se tienen que trazar ángulos centrales de 30°, sin embargo, bastará con trazar un ángulo central y dividir la circunferencia con ayuda del compás en 12 arcos de la misma medida, para que al unirlos con segmentos de recta se forme un dodecágono regular como el de la FIGURA 16.3.

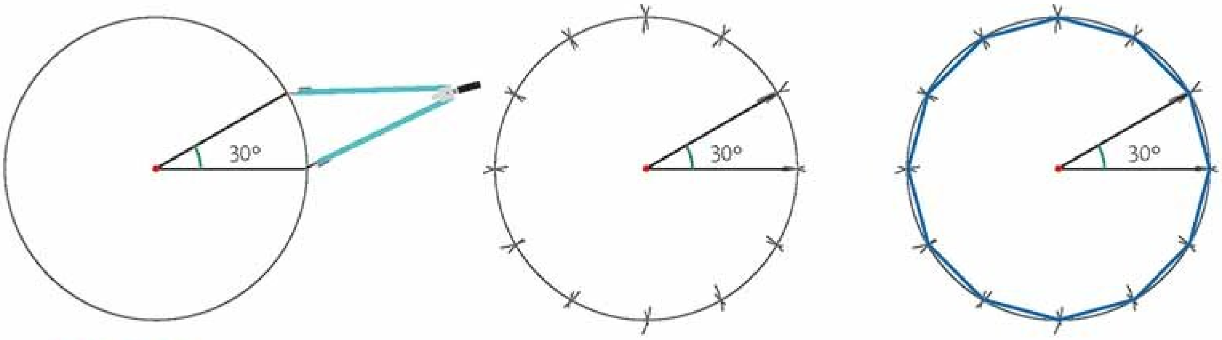


FIGURA 16.3

Cuando la medida de cada ángulo central de un polígono regular crece, el número de lados disminuye; cuando la medida de cada ángulo central de un polígono regular decrece, el número de lados ______________________

En un polígono, los ángulos interiores están formados por la abertura de dos lados consecutivos.

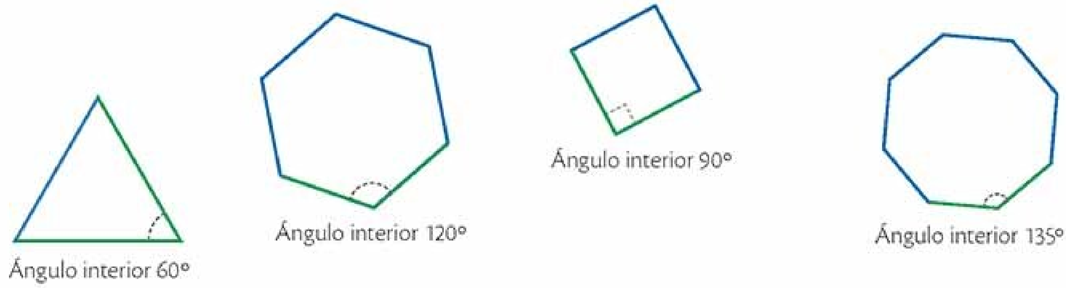


FIGURA 16.4 Ángulos interiores de un polígono.

Si, por ejemplo, se quiere trazar un pentágono a través de los ángulos interiores del polígono, un procedimiento es el siguiente:

1. Calcular la medida del ángulo interior (estudiado en la lección anterior).
2. Decidir la medida del lado del polígono y trazar un ángulo de ______° con la medida seleccionada (FIGURA 16.5).

FIGURA 16.5

Seguir trazando ángulos de 108°, uno a continuación del otro y con la medida elegida para los lados. El último ángulo ya no lo tendrás que medir.

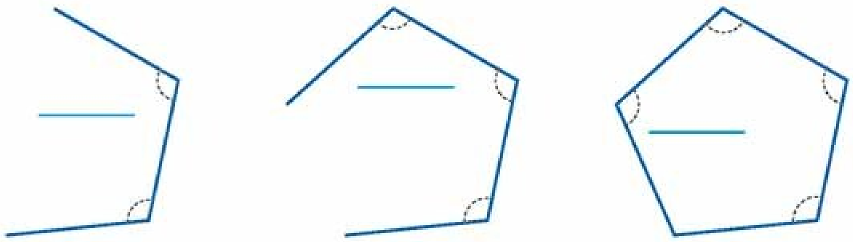


FIGURA 16.6

Si como referencia para el trazo de un polígono te dan la medida del ángulo exterior, puedes deducir la medida del ángulo interior o del central y usar los métodos estudiados.

Vuelve a leer el Reto y Un nuevo reto, compara los procedimientos que utilizaron tú y tus compañeros con lo estudiado anteriormente, si tienes dudas o alguna observación, exponlas ante el grupo.

¡A PRACTICAR!

1. En tu cuaderno traza los siguientes polígonos regulares con las condiciones y referencias que se indican. Escribe junto a tus trazos una breve explicación del procedimiento que seguiste.

a) Un polígono regular de 5 cm por lado con ángulos centrales de 120°.

b) Un polígono regular con ángulos externos de 90°.

c) Un polígono regular con ángulos internos de 135°.

- ¿Cómo se llaman los polígonos que trazaste?

Presenta tu trabajo ante el grupo y, en caso de dudas, consulta con tu profesor.

Para terminar

1. Contesta las siguientes preguntas junto con un compañero. Repasen la lección para corregir o comenten grupalmente las preguntas y respuestas en las que tuvieron dudas.

a) ¿Es posible trazar un polígono regular con cualquier medida de ángulo central?

____

¿Por qué? ______________________________

b) ¿La suma de los ángulos centrales es la misma en todos los polígonos regulares?

____

¿Por qué? ______________________________

c) ¿La suma de los ángulos internos es la misma en todos los polígonos regulares?

____

d) ¿La suma de los ángulos externos es la misma en todos los polígonos regulares?

____

e) ¿Cómo se podrá trazar un polígono regular si se conoce la medida del arco que abarca un lado? ______________________________

____

Portafolio de evidencias

Selecciona para tu portafolio de evidencias, algún trabajo sobre el trazo de un polígono regular si se conoce la medida de uno de sus ángulos centrales, internos o externos.

2. En tu cuaderno escribe brevemente qué conocimientos adquiriste con la lección respecto del trazo de polígonos regulares si se conoce la medida de uno de sus ángulos: central, interno o externo y qué dudas tienes.

Compara con lo escrito por tus compañeros y en caso necesario consulten con su profesor.

TIC

Reúnete con dos compañeros, abran una hoja de trabajo en GeoGebra y sigan los pasos que se detallan a continuación.

1. Con clic derecho en el ratón eliminen la cuadrícula y los ejes de coordenadas. Cierren también la vista algebraica haciendo clic en la X (FIGURA 16.7).

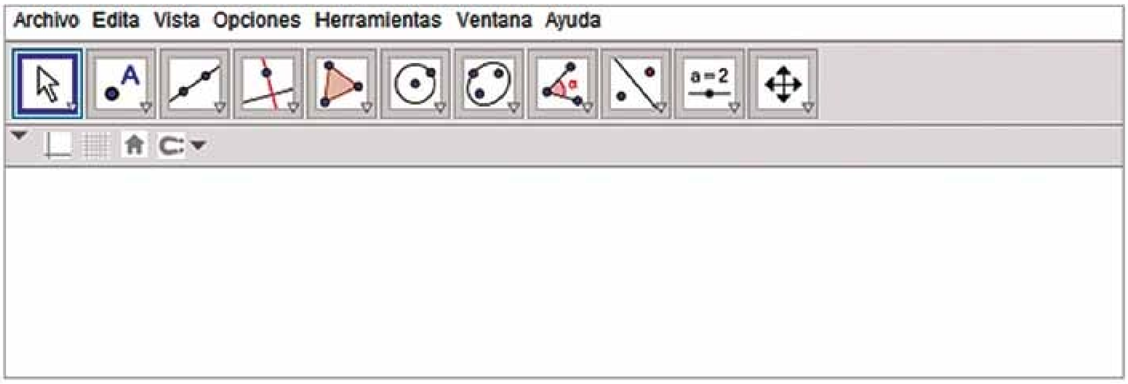


FIGURA 16.7

2. Elijan el comando de polígonos regulares.

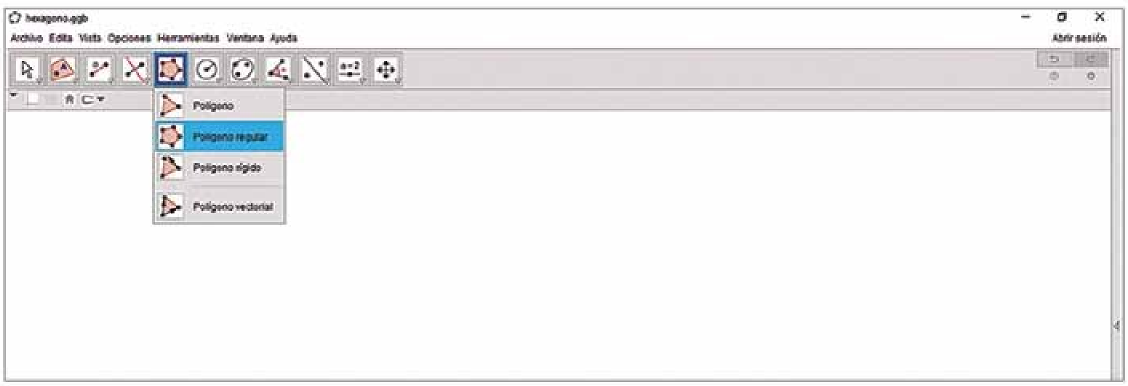


FIGURA 16.8

3. Tracen polígonos regulares de diferente número de lados, por ejemplo, de 7 lados.
   a) Marquen en la pantalla dos puntos que corresponderán a la medida de un lado.
   b) Se desplegará un cuadro de texto en el que tienen que escribir el número de lados que tendrá el polígono.

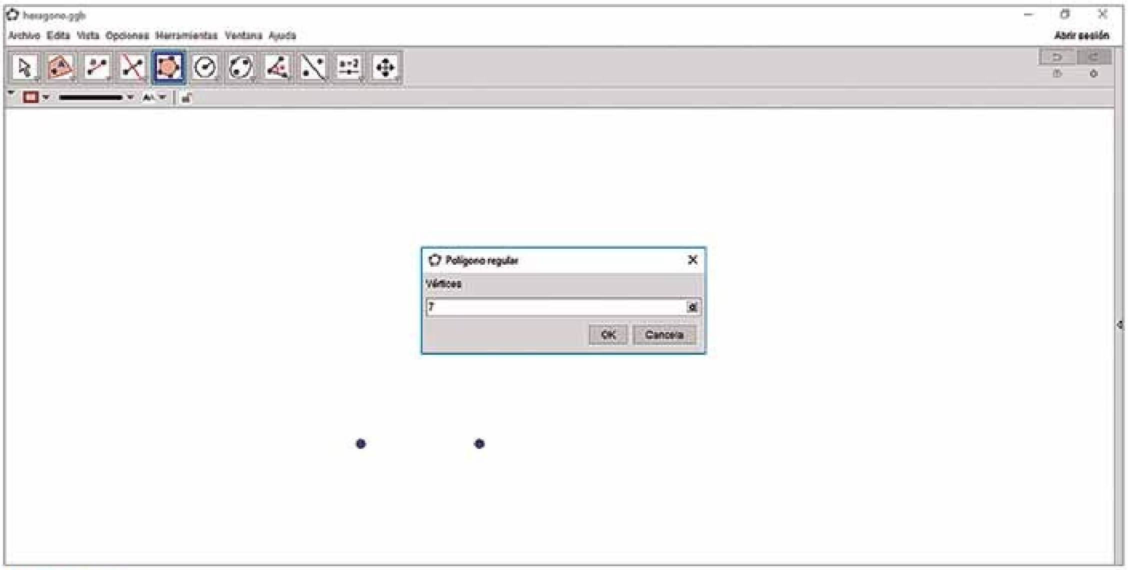


FIGURA 16.9

4. Escriban en su cuaderno la medida de sus ángulos centrales, interiores y exteriores y corroboren sus respuestas.
   a) Para verificar la medida de los ángulos interiores, con el comando ángulo, marquen los tres puntos que limitan el ángulo, cuidando que el segundo corresponda al vértice.
   b) Para verificar la medida de los ángulos exteriores, prolonguen algunos lados con el comando línea y midan los ángulos exteriores.

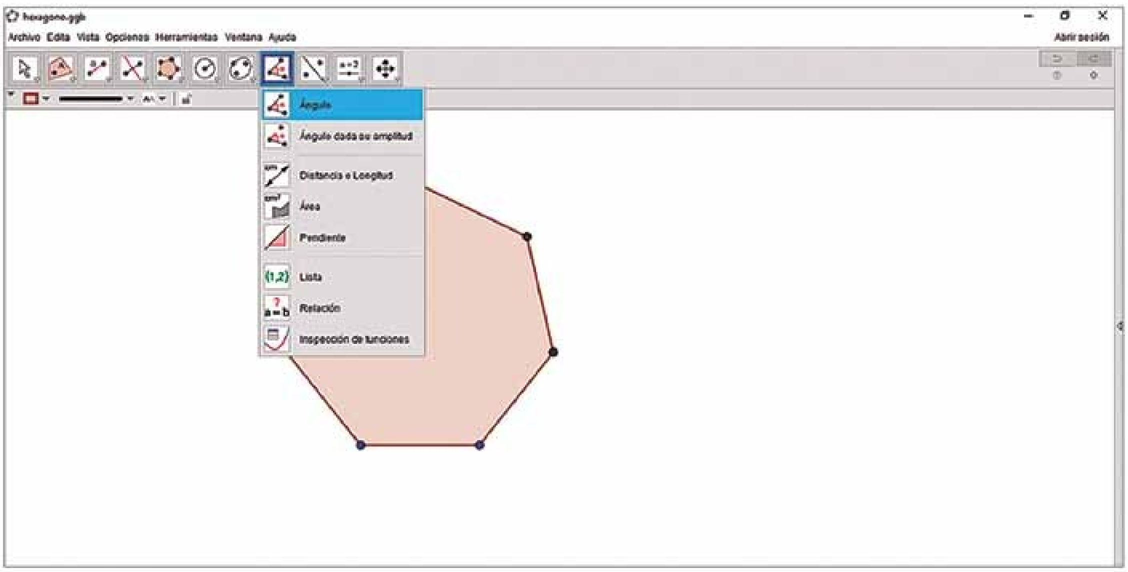


FIGURA 16.10

5. Finalmente planeen una estrategia para encontrar el centro del polígono, tracen sus ángulos centrales con ayuda del comando Segmento y mídanlos.

Los polígonos que cubren un plano

Aprendizaje esperado: Deduce y usa las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.

Contenido: Polígonos que cubren el plano: Análisis de la construcción de mosaicos (teselados) usando polígonos regulares e irregulares.

Para arrancar

1. En parejas, observen las siguientes figuras geométricas, deduzcan la medida de uno de sus ángulos interiores y anótenlo dentro del polígono.

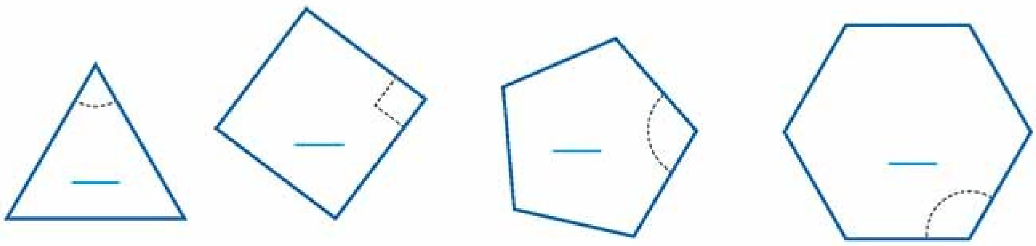


FIGURA 17.1 Ángulos interiores en polígonos regulares.

Comparen sus respuestas con las de otras parejas.

Reto

1. Unan a un compañero a su equipo para resolver el siguiente reto.

Pamela quiere mandar colocar el piso de la recámara de su hija Valentina, por lo que va a una distribuidora, y el vendedor que la atiende le indica lo siguiente:

Tenemos losetas cuadradas y rectangulares (FIGURA 17.2), y una de sus ventajas es que siempre puede cubrirse un piso usando estas losetas.

FIGURA 17.2 Losetas para piso.

Tenemos también losetas que tienen al menos dos lados del mismo tamaño, para poder cubrir un piso o combinarlos en caso de que usted así lo quiera, pero no siempre se puede cubrir el piso usando un solo tipo de figura.

Una ventaja de estas losetas y su combinación, es que puede crear diferentes diseños dependiendo de las piezas que escoja (FIGURA 17.3).

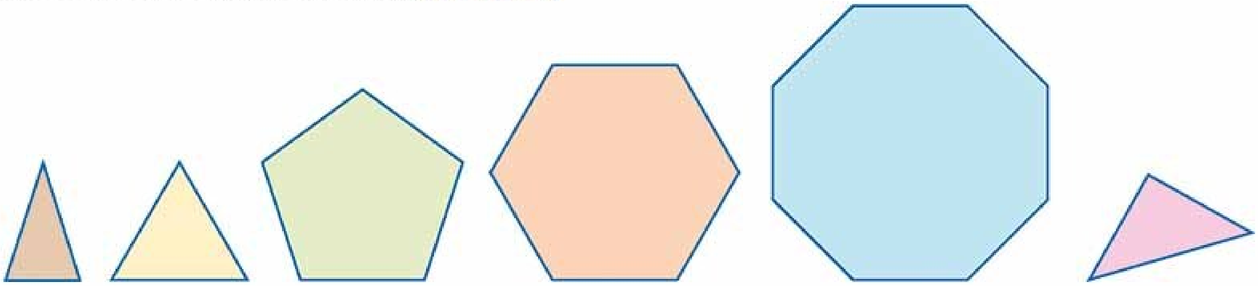


FIGURA 17.3 Diferentes tipos de losetas para piso.

Pamela se decidió por el segundo tipo de losetas.

a) Escriban en su cuaderno la respuesta a las siguientes preguntas.
- ¿Con qué tipo de losetas podrá cubrir el piso sin necesidad de combinarlas?
- ¿Por qué?
- ¿Qué losetas tendría que combinar para poder cubrir el piso?
- ¿Por qué?

b) Escriban en su cuaderno sus conclusiones, compárenlas con otros equipos y en forma grupal. Si es necesario, expongan sus dudas en el grupo.

Pistas

1. En sus equipos del Reto, lean lo siguiente, llenen la TABLA 17.1 y contesten las preguntas.
- Cada integrante del equipo, trace y recorte en papel o cartón al menos tres polígonos de los mostrados anteriormente. Los polígonos regulares deben tener los lados del mismo tamaño y los triángulos isósceles la longitud de sus lados iguales, de la misma medida que el lado de los polígonos regulares.
- Propongan con qué losetas del mismo tipo podrán cubrir un plano, sin que queden huecos, y en qué casos tendrán que combinarlos (FIGURA 17.4).
- Posteriormente, intenten cubrir un plano sin que queden huecos con los polígonos que propusieron, y registren en la tabla los datos que se solicitan.

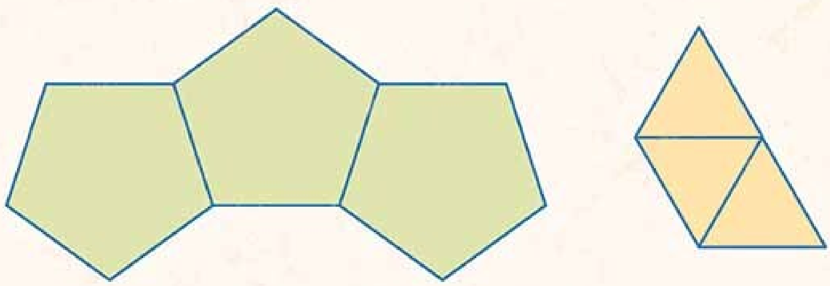


FIGURA 17.4 Polígonos para cubrir un plano, ¿con cuál quedarán huecos?

Polígono	A primera vista, ¿cubre el plano?	¿Hay huecos o se enciman los polígonos?	Con los polígonos de papel, ¿cubre el plano sin dejar huecos?	¿Necesita de otro polígono para cubrir el plano?	Medida de sus ángulos internos
Pentágono					
Hexágono					
Octágono					
Triángulo isósceles rectángulo					
Triángulo isósceles no rectángulo					

TABLA 17.1 ¿Con cuáles polígonos?

- ¿En cuántos casos sus estimaciones fueron correctas?
- Analicen por qué algunos polígonos pueden cubrir un plano sin combinarse.
- ¿Cuáles son los polígonos que deben combinarse para poder cubrir el plano?
- Escriban en su cuaderno qué influencia tiene la medida de los ángulos internos en los polígonos, para poder o no cubrir un plano.
- Escuchen las opiniones de otros equipos.

Compartan con otras parejas sus resultados y, en caso de dudas, consulten con su profesor o profesora.

Para analizar

Un nuevo reto

1. Reúnete con algunos de tus compañeros, construyan en una hoja de su cuaderno una **teselación** usando polígonos (que no sean cuadriláteros), pueden ser regulares o irregulares. Si es necesario pueden usar combinaciones de polígonos.

a) Escriban en su cuaderno los polígonos que usaron y expliquen brevemente cuál fue su estrategia y a qué problemas se enfrentaron para lograr el reto.

b) Expongan sus teselaciones en el grupo y cuenten cuántos polígonos diferentes usó cada equipo.

- ¿Cuántos polígonos diferentes tiene la teselación del equipo que usó menos?
- ¿Cuántos polígonos distintos contaron en la teselación del equipo que usó más?

c) Comenten en grupo cómo decidieron cuáles polígonos utilizar, y escuchen las opiniones de los demás. En caso de dudas, consulten con su profesor.

Se vale

Colaboración

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan por qué no todos los polígonos pueden teselar un plano.

Formalización

Se llama teselación de un plano a un arreglo de polígonos regulares o irregulares que cubre el plano sin dejar huecos y sin superponer los polígonos.

No siempre es posible cubrir el plano con un solo tipo de polígono.

Glosario

Teselar. Cubrir con figuras un plano sin dejar espacios ni encimar piezas.

Los cuadrados y los rectángulos son los polígonos más populares para cubrir un plano, porque con ellos siempre es posible cubrirlo sin dejar huecos y sin superponerlos, esto sucede porque al colocar varios juntos en la unión de sus vértices, sus ángulos interiores suman 360°. Observa la FIGURA 17.5.

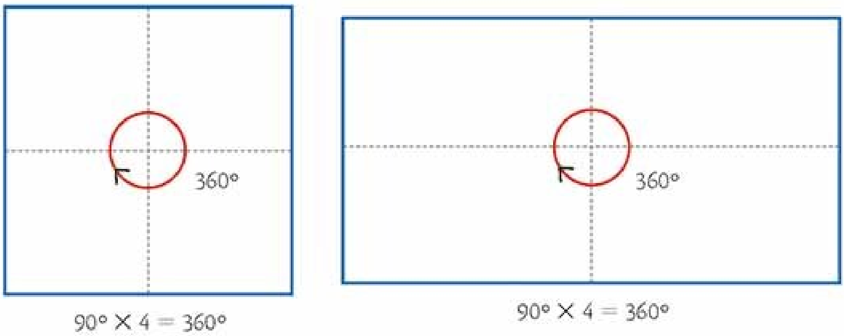


FIGURA 17.5 La suma en la unión de los vértices debe ser de 360°.

En el caso de otros polígonos, como el pentágono regular, no es posible cubrir el plano. Observen la FIGURA 17.6 y escriban brevemente en su cuaderno, ¿por qué no es posible cubrir un plano usando solamente pentágonos regulares?

Completen el enunciado. Un plano podrá cubrirse con cualquier figura geométrica, siempre y cuando en la unión de sus vértices, la suma de sus ángulos interiores sea ______________________________.

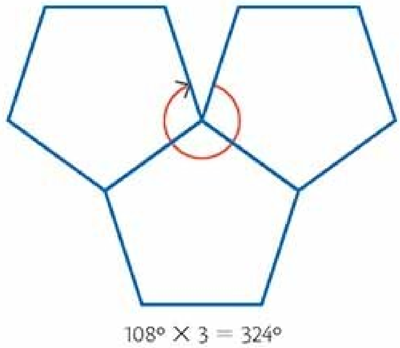


FIGURA 17.6 Los pentágonos no cubren totalmente el plano.

- Investiguen cuáles son los únicos polígonos regulares con los que se puede teselar un plano y anoten sus nombres a continuación:

  ____

  ____

  ____

- En su cuaderno, teselen una parte de una hoja con los polígonos anteriores para comprobar que sí es posible, y verifiquen que la suma de los ángulos interiores en la unión de los vértices sea de 360°.

También es posible cubrir un plano combinando diferentes polígonos regulares o irregulares, siempre y cuando la suma de sus ángulos interiores en la unión de sus vértices sea de __________°.

Observen su salón de clases y las ventanas para que distingan el tipo de polígonos con los que se cubrió el plano, y comenten en grupo si conocen algún plano cubierto por polígonos que no sean cuadriláteros.

Ahora que analizaste las condiciones que deben cumplir los polígonos para teselar el plano, vuelve a leer el Reto y Un nuevo reto.

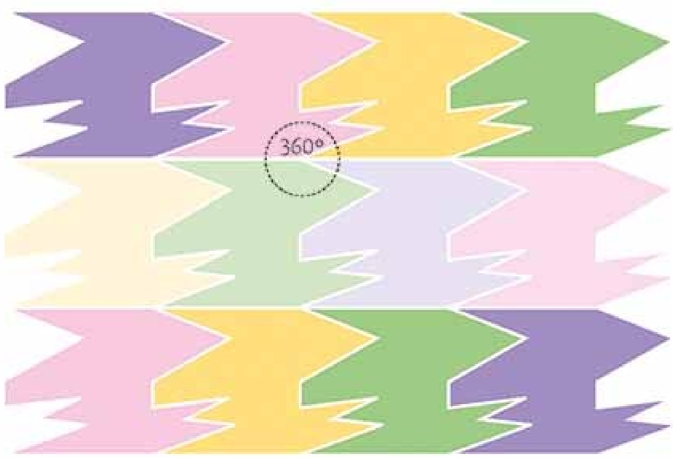
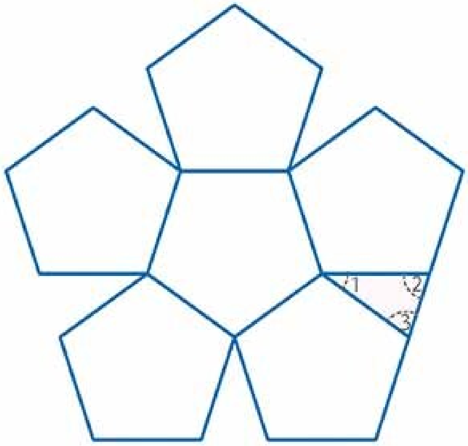


FIGURA 17.7 La suma en la unión de los vértices debe ser de 360°.

¡A practicar!

1. Observa la imagen y responde las preguntas.



$\measuredangle 1 =$ ______

$\measuredangle 2 =$ ______

$\measuredangle 3 =$ ______

FIGURA 17.8 Pentágonos y triángulos para cubrir el plano.

a) ¿Cuánto deben medir los ángulos del triángulo para cubrir el espacio entre los pentágonos regulares?

b) El triángulo que llena los espacios, ¿es equilátero, isósceles o escaleno?

______

¿Por qué? ______

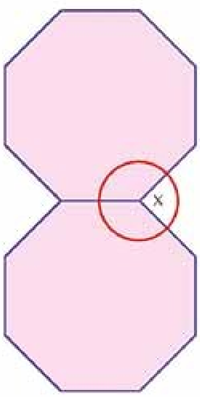


FIGURA 17.9 Octágonos para cubrir el plano.

2. Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un octágono regular?

______

b) Si se unen dos octágonos por sus aristas, ¿cuánto mide la suma de la medida de los ángulos interiores que se juntan? ______

c) ¿Cuánto debe medir el ángulo x para que la suma sea de 360°? ______

d) ¿Qué otro polígono puedes usar para ayudar a cubrir el plano?

______

¿Por qué? ______

Para terminar

1. Reúnete con un compañero y contesten las siguientes preguntas. Repasen la lección para verificar lo que sea necesario, comenten en el grupo las preguntas y respuestas en las que les surgieron dudas.

a) ¿Cualquier polígono puede teselar el plano? ______

¿Por qué? ______

b) ¿Se podrá teselar un plano con cualquier tipo de triángulos?

______

¿Por qué? ______

c) ¿Qué condición deben cumplir los polígonos para poder teselar un plano?

______

d) ¿Se podrá teselar un plano con figuras que tengan lados curvos?

______

¿Por qué? ______

Portafolio de evidencias

Selecciona para tu portafolio de evidencias algún trabajo sobre los polígonos que pueden teselar un plano y por qué.

Para que observen algunos teselados artísticos, busquen en internet "Teselaciones de Escher" y observen las imágenes de este artista holandés.

En tu cuaderno escribe brevemente qué conocimientos adquiriste con la lección respecto de teselar un plano con polígonos regulares o irregulares y qué dudas tienes. Compara con lo escrito por otros compañeros o compañeras y en caso necesario comenten las dudas en plenaria.

TIC

Reúnete con dos de tus compañeros, abran una hoja de GeoGebra y sigan las indicaciones que se detallan a continuación.

1. Con clic derecho en el ratón eliminen la cuadrícula y los ejes de coordenadas. Cierren también la vista algebraica haciendo clic en la X.

FIGURA 17.10 Pantalla de GeoGebra.

2. Elijan el comando de polígono y tracen un polígono.

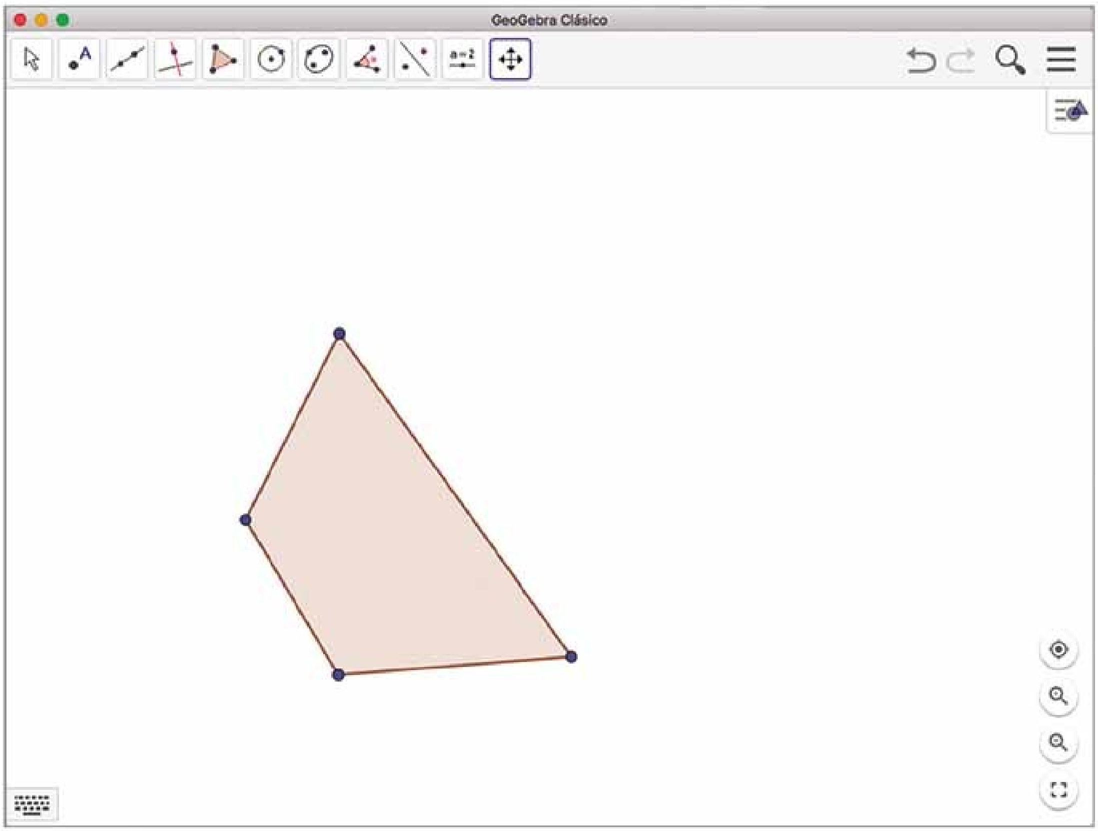


FIGURA 17.11 Trazo de un polígono.

Glosario

Simetría axial. Si una figura es el reflejo de otra con respecto a una recta, para cada punto de la figura original, existe otro reflejado perpendicularmente a la misma distancia de la recta de referencia.

3. Seleccionen el comando de **simetría axial**, sigan las indicaciones que les da la ayuda y observen qué pasa.

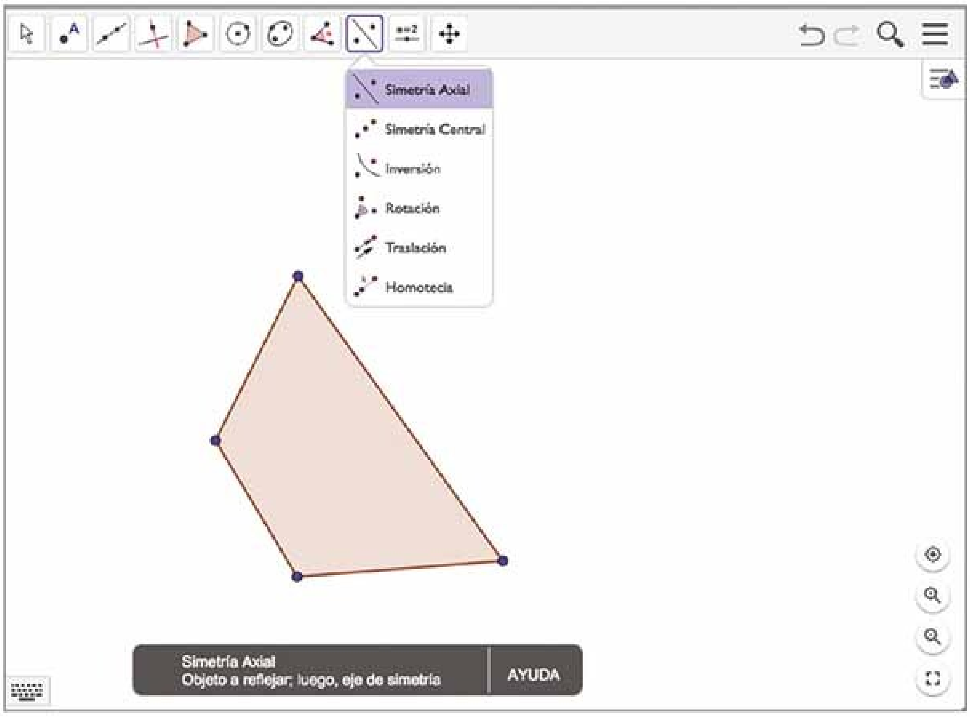


FIGURA 17.12 Comando de simetría axial.

Cuando configuran el programa para que trace el simétrico de una figura respecto de un lado, lo que se obtiene es una nueva figura que pareciera reflejada en un espejo colocado sobre el lado de referencia.

Observen los polígonos originales y sus simétricos.

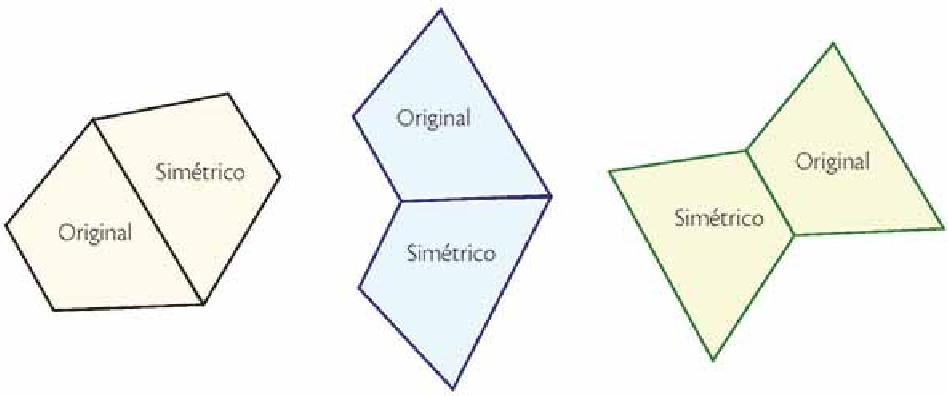


FIGURA 17.13 Trazo de polígonos simétricos.

4. Ahora usen el *software* de geometría y tracen algún polígono regular. Por ejemplo, un triángulo equilátero.
5. Sigan reproduciendo el triángulo hasta teselar el plano.

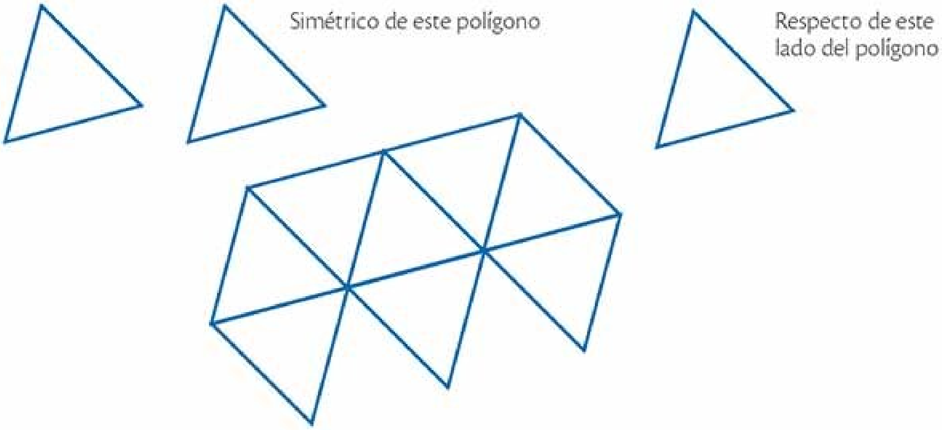


FIGURA 17.14 Simetría con triángulos equiláteros.

6. Prueben con otros polígonos regulares o irregulares (FIGURA 17.15).

7. Escriban en su cuaderno sus conclusiones a las investigaciones y compártanlas con otros equipos.

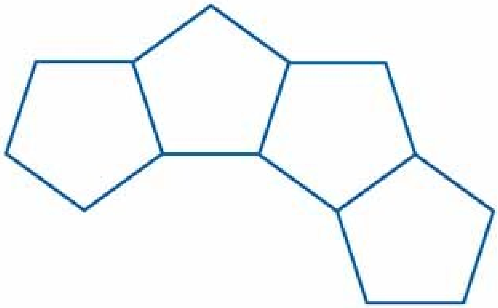


FIGURA 17.15 Simetría con pentágonos.

Para leer

La geometría en el diseño

Hace muchos años empezó a usarse la geometría para decorar diversos objetos: vasijas, tejidos, puertas, muros, etcétera, todos, con diseños geométricos repetitivos. Un cristalógrafo ruso llamado Evgraf Stepanovich Fedorov demostró, en 1891 que no hay más que 17 estructuras básicas para las infinitas decoraciones posibles del plano, formando mosaicos periódicos, esto es, con mosaicos que se repiten en un orden, forma y tamaño establecido. Los árabes fueron los creadores de los mosaicos en un lugar bellísimo llamado la Alhambra, en Granada, España, y allí se encuentran todas las estructuras que Fedorov demostró que existían. Cuando se construyó la Alhambra, el trabajo de Fedorov aún no se publicaba. Investiguen si en su comunidad hay alguna obra de teselado y analicen el tipo de polígonos con el que se hizo.

FIGURA 17.16 Teselados.

La forma de medir

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Contenido: Sistema Internacional de Medidas, conversión de unidades.

Para arrancar

p

1. Reúnete con un compañero, observen la **FIGURA 18.1** y encierren el auto que lleva mayor velocidad.

$62.5\ \frac{m}{s}$

$3.8\ \frac{km}{min}$

$225\ \frac{km}{h}$

FIGURA 18.1 Autos y sus velocidades.

a) ¿Cómo supieron cuál de los tres carros es el más veloz? ______________________

____

b) ¿En qué unidad de medida los compararon? ______________________

c) Comparen sus respuestas y estrategias grupalmente.

Reto

e

1. Integren a un compañero más a su equipo y resuelvan el siguiente reto.

Doña Catalina quiere mandar construir una **cisterna** a la que le quepa el contenido de una pipa con 10 000 litros de agua, pero necesita saber la forma y sus dimensiones, para planear dónde construirla.

La tapa de la cisterna será una plancha de cemento con 5 cm de espesor.

Doña Catalina tiene dos lugares posibles para su construcción, de las siguientes dimensiones:

- 2 metros por 2.5 metros.
- 3 metros por 1.5 metros.

a) ¿Cuáles pueden ser las dimensiones de la cisterna en cada uno de los espacios disponibles?

b) ¿Cómo se pueden decidir las dimensiones de la cisterna en metros, de tal forma que su capacidad sea de 10 000 litros? ______________________

____

____

c) Comenten con otros equipos sus estrategias y resultados. En caso de ser necesario, expongan sus dudas en el grupo.

LECCIÓN 18

Glosario

Cisterna. Depósito donde se recoge el agua de lluvia o la que llega por tubería.

Pistas

1. En los mismos equipos del Reto lean lo siguiente y contesten las preguntas.

En el patio de su escuela, pueden hacer lo siguiente: tomen algunos envases en forma de prisma rectangular que contengan $\frac{1}{4}$ de litro, $\frac{1}{2}$ litro, 1 litro y 2 litros o más, y mídanlos en cm y en dm, calculen su volumen y registren las medidas en la **TABLA 18.1**.

Recipiente	Capacidad en litros	Dimensiones			Medida en cm^3	Medida en dm^3
		Largo	Ancho	Alto		
1						
2						
3						
4						
5						

TABLA 18.1 Envases, sus dimensiones y capacidad en litros.

- ¿Cuántos cm^3 son equivalentes a 1 litro?
- ¿Cuántos dm^3 son equivalentes a 1 litro?
- ¿Cuántos dm^3 caben en 1m^3 ?
- ¿Cuántos litros cabrán en 1m^3 ?
- ¿Cuántos m^3 deberá tener de capacidad la cisterna de doña Catalina para que le quepan 10 000 litros?

Compartan con otros equipos sus resultados y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Para analizar

Un nuevo reto

1. El papá de Lalo quiere comprar un terreno. Le muestran tres casos cuyas dimensiones se presentan enseguida, pero él quiere el de mayor superficie.

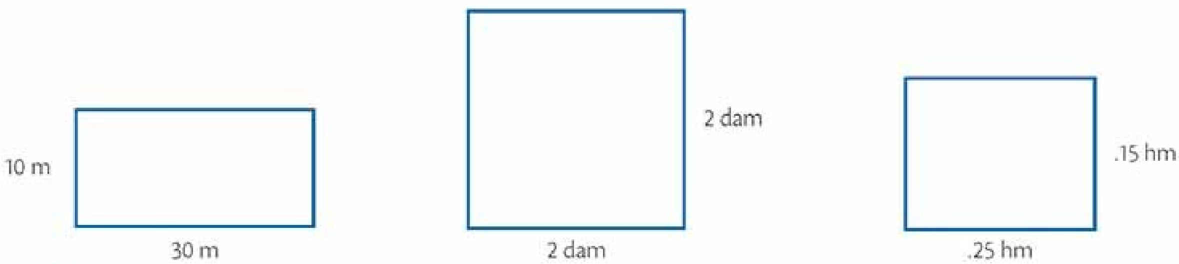


FIGURA 18.2 Catálogo con las dimensiones de los terrenos que están a la venta.

Escribe en tu cuaderno la estrategia seguida para comparar los terrenos y decidir cuál es el que conviene comprar.

a) ¿Cuál deberá comprar?

b) Comparte con el grupo tu trabajo y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Se vale

Colaboración

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan por qué es necesario expresar los datos en una sola unidad de medida para una mejor comparación.

Formalización

1. Forma un equipo con tus compañeros y analicen la siguiente información.

En el Sistema Internacional de Medidas (SI) se usan diferentes unidades básicas, entre ellas están:

El metro, para medidas de longitud y de la cual se derivan el m^2 y el m^3 respectivamente, con sus múltiplos y submúltiplos.

Múltiplos				Submúltiplos		
km	hm	dam	m	dm	cm	mm
1 000 m	100 m	10 m	1 m	0.1 m	0.01 m	0.001 m
Múltiplos				**Submúltiplos**		
km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2
1 000 000 m^2	10 000 m^2	100 m^2	1 m^2	0.01 m^2	0.0001 m^2	0.000001 m^2
Múltiplos				**Submúltiplos**		
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1 000 000 000 m^3	1 000 000 m^3	1 000 m^3	1 m^3	0.001 m^3	0.000001 m^3	0.000000001 m^3

TABLA 18.2 Unidades lineales, cuadradas y cúbicas.

- ¿Cómo varían los múltiplos y cómo los submúltiplos de las unidades lineales?
- ¿Cómo varían los múltiplos y submúltiplos de las unidades cuadradas?
- ¿Cómo varían los múltiplos y submúltiplos de las unidades cúbicas?

El gramo, para las unidades de masa y del cual se derivan sus múltiplos y submúltiplos.

- ¿Cómo varían los múltiplos y cómo los submúltiplos del gramo?

Múltiplo	Unidad	Submúltiplos					
Tonelada métrica	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
1 Tm	1 kg	10 hg	100 dg	1000g	10 000 dg	100 000 cg	1000 000 mg
1000 kg	1 kg	0.1 kg	0.01 kg	0.001kg	0.0001kg	0.00001kg	0.000001 kg

TABLA 18.3 El gramo, múltiplos y submúltiplos.

El segundo, para unidades de tiempo.

Se utilizan también el minuto, la hora y el día, los cuales se pueden representar con segundos, aunque estas medidas no pertenecen al SI.

1 minuto equivale a 60 segundos.

1 hora equivale a 3 600 segundos.

1 día equivale a 86 400 segundos.

Vuelve a leer el Reto y el Un nuevo reto, plantea dudas, observaciones y comentarios ante el grupo y escuchen con atención a los demás integrantes de éste.

¡A practicar!

1. Resuelve los siguientes problemas.

a) Lucio quiere elaborar marcos de madera de diferentes dimensiones, al menos de 50 cm por lado. Si se tienen tiras de madera de 2.5 m, ¿cuántos marcos diferentes podría elaborar Lucio con cada tira?

- Si tarda en hacer cada marco 45 min, ¿cuántos hará en una jornada de 6 horas?
- ¿Cuántos marcos hará en 20 días de trabajo?

b) Representa de distintas formas un terreno con 600 m^2 de área, de tal forma que tengan el mismo perímetro.

c) Investiga qué otras unidades de medida están en el SI y lo que miden.

d) Se tiene un barril conteniendo 2 hl de líquido, el cual se debe emplear para llenar botellas de 250 ml, ¿cuántas botellas se podrán llenar con el líquido del barril?

e) Inventa un problema en el que intervengan los siguientes datos: 65 kg, 850 g y resuélvelo.

2. Termina de plantear el problema y resuélvelo.

En una tienda, venden los siguientes recipientes para ropa.

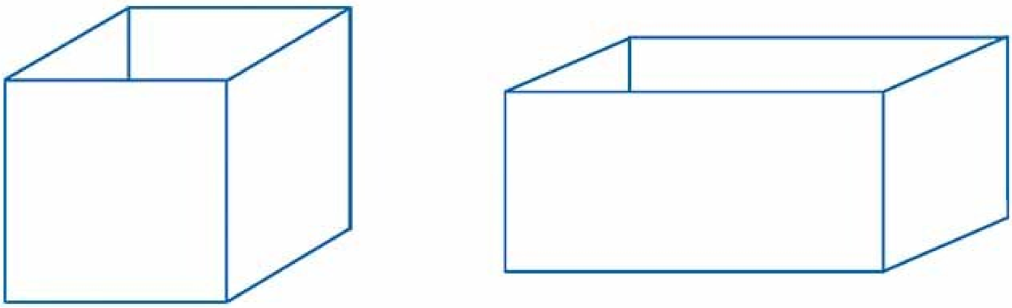


FIGURA 18.3. Contenedores para ropa.

- Expongan sus resultados, dudas o comentarios en el grupo y escuchen con atención a los demás integrantes de éste.

Para terminar

1. En parejas contesten las siguientes preguntas. De ser necesario vuelvan a revisar la lección o comenten grupalmente las preguntas y respuestas en las que tuvieron dudas.

a) ¿Qué unidad de medida usarían para medir la longitud de una carretera?

____

b) ¿Qué unidad de medida usarían para medir la superficie de una cancha de basquetbol? ______________________________

c) ¿Qué unidad de medida usarían para medir el tiempo que tarda en caer una pelota? ______________________________

d) ¿Qué unidad de medida usarían para comparar dos barcos?

____

- ¿Qué medirían de ellos? ______________________________

e) ¿Qué unidad de medida usarían para medir la cantidad de luz que irradia un foco? ______________________________

2. Comparen sus respuestas con las de otras parejas y comenten, en caso necesario, el porqué de las respuestas diferentes.

Portafolio de evidencias

Elige para tu portafolio de evidencias algún trabajo sobre las relaciones de igualdad en ángulos entre paralelas cortadas por una transversal.

3. En tu cuaderno escribe brevemente qué conocimientos adquiriste con la lección respecto del Sistema Internacional de Medidas y qué dudas tienes. Compara con lo escrito por otros estudiantes y, en caso necesario, consulten con su maestro o maestra.

TIC

e

1. Realicen en equipo las siguientes tablas.
   a) Usen una hoja de cálculo electrónica para hacer una tabla de equivalencias en medidas de longitud.
      - Observen bien las fórmulas que se usarán.

F13 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		Equivalencias en medidas de longitud								
3			km	=B3*10	=D3*10	=E3*10	=F3*10	=G3*10	=H3*10	
4		=C4/10		hm	=C4*10	=E4*10	=F4*10	=G4*10	=H4*10	
5		=C5/10	=D5/10		dam	=D5*10	=F5*10	=G5*10	=H5*10	
6		=C6/10	=D6/10	=E6/10		m	=E6*10	=G6*10	=H6*10	
7		=C7/10	=D7/10	=E7/10	=F7/10		dm	=F7*10	=H7*10	
8		=C8/10	=D8/10	=E8/10	=F8/10	=G8/10		cm	=G8*10	
9		=C9/10	=D9/10	=E9/10	=F9/10	=G9/10	=H9/10		mm	
10										

FIGURA 18.4 Equivalencias en medidas de longitud en hoja de cálculo.

Al escribir en las celdas amarillas una cantidad, automáticamente mostrará las equivalencias en otras unidades de medida

- ¿Por qué en las celdas azules de la parte superior se multiplica cada vez por 10?
- ¿Por qué en las celdas azules de la parte inferior se divide cada vez entre 10?

   b) Elaboren otras dos tablas, una para encontrar equivalencias en medidas de masa y otra para encontrar equivalencias en unidades de tiempo.

Usen las tablas para resolver problemas.

Para leer

Las unidades de medida

La humanidad ha tenido desde la antigüedad la necesidad de medir, y lo ha hecho con infinidad de métodos. Cuenta la historia que cada vez que se desbordaba el río Nilo, los egipcios debían volver a medir las tierras que estaban en su rivera, lo cual los hizo muy competentes en geometría (etimológicamente quiere decir "ciencia que mide la Tierra").

También cuenta la historia que se media por dedos, palmos, cuartillas, codos o varas, pero estas medidas dependían del tamaño de quien las usaba; así, una cuartilla o cuarta, o una vara, no era la misma para una persona de talla pequeña que para una de talla grande.

Había muchos problemas a la hora de comprar, ya que el vendedor quería usar su unidad de medida, y el comprador, la suya, ambos buscando el beneficio propio.

Hasta que en 1791, en Francia se propuso como unidad de medida fundamental al metro, y de esta medida se fueron desarrollando otras que también se oficializaron y adoptaron a nivel mundial, surgiendo el Sistema Métrico Decimal.

El Sistema Inglés

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Contenido: Sistema Inglés, conversión de unidades.

Para arrancar

1. Trabaja en conjunto con un compañero para resolver el siguiente problema.

p

Patricia lleva a sus hijas a una competencia de gimnasia rítmica, que inicia a la 11 am y le faltan 332.5 km para llegar a su destino, si maneja a una velocidad promedio de 95 $\frac{km}{h}$, (a veces a mayor o menor velocidad, pero al dividir los kilómetros recorridos entre el tiempo transcurrido da un promedio de 95 $\frac{km}{h}$) y son las 6:45 am.

a) Estimen si llegará a tiempo a la competencia.
b) ¿A qué hora llegaran a la competencia?
c) Si tardan 15 minutos en vestirse y 15 minutos en hacer ejercicios de calentamiento, ¿estarán listas a las 11 para competir?

FIGURA 19.1 Velocímetro de un automóvil que va a 95 $\frac{km}{h}$.

Reto

1. Integren a un compañero más al equipo y resuelvan el siguiente reto.

e

Carlos y Dora son comerciantes que viajaron a Estados Unidos para buscar nuevos mercados; a su llegada encontraron que la gasolina en lugar de litros, se despacha en **galones**. Si al tanque de su auto le caben 50 litros y les queda $\frac{1}{4}$ de tanque, ¿cuántos galones le tendrán que poner para que llegue por lo menos a $\frac{3}{4}$?

a) Investiguen a cuántos litros equivale un galón.
b) Completen la definición en el glosario.
c) Comparen sus respuestas con las de otros equipos y comenten en el grupo otras posibilidades.

FIGURA 19.2 Tanque de gasolina que contiene $\frac{1}{4}$ de su capacidad.

LECCIÓN 19

Pistas

e

1. En los equipos del Reto, lean lo siguiente y contesten las preguntas.
- ¿Cómo calculan la cuarta parte de una cantidad?
- ¿Cómo calculan las tres cuartas partes de una cantidad?
- ¿El resultado de restarle $\frac{1}{4}$ a una cantidad y de calcular $\frac{3}{4}$ de esa cantidad son iguales?
- ¿A cuántos litros equivale un galón?
- ¿Cuántos galones de gasolina le caben al auto de Carlos y Dora?
- ¿Cuántos galones de gasolina tiene el auto de Carlos y Dora?

Glosario

Galón. Unidad de medida inglesa usada para medir líquidos equivalente a 3.785 litros.

- ¿Cuántos galones de gasolina hay que ponerle al auto de Carlos y Dora para que tenga al menos $\frac{3}{4}$ de su capacidad?

Compartan con otros equipos sus resultados y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Para analizar

Un nuevo reto

FIGURA 19.3 Empaque que contiene 2.5 libras de producto.

1. Dora ha visto una mercancía de la cual le interesa comprar una tonelada, pero observa que se vende en libras.
   a) Respondan las siguientes preguntas y hagan lo que se indica.
   - ¿Cómo podrá Dora saber cuántas libras comprar? ____________________
   ____
   - Investiguen la equivalencia de una libra en kg.
   - Una libra = __________ kg.
   - ¿Cuántos kg tiene una tonelada? ____________________

   b) Estimen si una tonelada será equivalente a un número exacto de libras.
   c) Corroboren sus respuestas.
   d) Expongan su trabajo ante el grupo y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Se vale

Colaboración

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan como calcular algunas equivalencias entre el SI y el sistema inglés de medidas.

Formalización

El sistema inglés de medidas, igual que el SI, tiene unidades de medida para medir diversos tipos de magnitudes, entre ellas están las de longitud, superficie, capacidad y masa.

Unidades de longitud:

1 Yarda = 91.44 cm

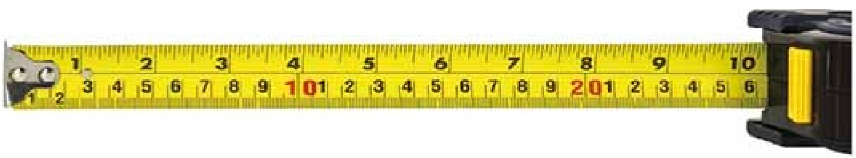


FIGURA 19.4 Flexómetro graduado en pulgadas y en centimetros.

1 Pulgada = 2.54 cm

- ¿A cuántas pulgadas equivale una yarda? ____________________

Unidades de capacidad:

1 Galón = 3.785 litros (dm^3) (redondeado a milésimos)

Onza líquida = 29.57 cm^3 (ml) (redondeado a centésimas)

- ¿Cuántas onzas tiene un galón? ____________________

FIGURA 19.5 Biberón graduado en mililitros y en onzas.

Unidades de masa:

1 Libra = 16 onzas

1 Libra = 453.592 g (redondeado a milésimos)

- ¿Cuántas libras equivale un kg? ____________
- ¿Cuánto pesa una onza en gramos? ____________
- Investiga la diferencia entre una onza en medidas de capacidad y una onza en medidas de masa.
- Investiga cuál es la unidad de medida en el sistema inglés para el tiempo.
- Investiga si en tu comunidad se vende o almacena algo en galones y coméntalo en el grupo.

2. Vuelve a leer el Reto y Un nuevo reto, compara la respuesta que les diste con lo estudiado en la lección.

¡A practicar!

1. Haz lo que se indica en cada caso.

a) Lucio tiene que unir diferentes tablas y no quiere que los clavos queden con las puntas salidas, ¿de cuántas pulgadas de largo los debe comprar?

- Para unir dos tablas de 3 cm de espesor cada una ____________
- Para unir una tabla de 5 cm de espesor con una de 2 cm ____________
- Para unir tres tablas, una de 4 cm de espesor, otra de 5 cm y otra de 2 cm ____________

b) Víctor tiene enferma una de sus vacas, por lo que tiene que inyectarle 1.5 onzas líquidas cada 24 horas por 5 días. El problema es que cuenta únicamente con jeringas de 5 ml, 10 ml y 50 ml. ¿Cuál(es) jeringas debe utilizar? ____________

c) Una persona usa una báscula que le indica 67 kg. Si esa misma persona usa una báscula calibrada en libras, ¿cuántas libras marcará?

d) Investiga el promedio de onzas de leche que toma un bebé por día y calcula cuántos galones de leche tomará en un año.

Para terminar

1. En parejas hagan lo que indica. Repasen la lección o comenten grupalmente las preguntas y respuestas en las que tuvieron dudas.

a) Mencionen algunos casos en los que se usen las yardas y pulgadas como unidades de longitud.

b) Mencionen algunos casos en los que se usen las onzas y galones como unidades de capacidad.

c) Mencionen algunos casos en los que se use la libra como unidad de masa.

d) Respondan las siguientes preguntas.

- ¿Qué unidad de medida del sistema inglés usarían para medir el agua de una alberca? ____________
- ¿Qué unidad de medida del sistema inglés usarían para medir el grosor de una tabla? ____________

2. En tu cuaderno escribe brevemente qué conocimientos adquiriste con la lección respecto de unidades de medida del sistema inglés y qué dudas tienes. Compara con lo escrito por otros compañeros y, en caso necesario, consulten con su maestro o maestra.

Portafolio de evidencias

Elige para tu portafolio de evidencias, la solución al reto y algún otro trabajo sobre el uso de unidades de medida en el sistema inglés.

TIC

1. Realicen en equipo las siguientes tablas.

a) Usen una hoja de cálculo electrónica para hacer una tabla de equivalencias en medidas de longitud.

- Observen bien las fórmulas que se usarán.

	A	B	C
1	Equivalencias en unidades de longitud		
2	Pulgadas	Yardas	
3		=A3/36	
4			
5	Yardas	Pulgadas	
6		=A6*36	
7			
8			

FIGURA 19.6 Equivalencias de unidades de longitud en hoja de cálculo.

- Al escribir una cantidad en las celdas amarillas, se calculará automáticamente su equivalencia en las celdas azules.

b) Respondan las siguientes preguntas.

- ¿Por qué para convertir pulgadas a yardas se divide entre 36?
- ¿Por qué para convertir yardas a pulgadas se multiplica por 36?

c) Elaboren otra tabla para calcular equivalencias entre las unidades de medida de capacidad.

d) Usen sus tablas para resolver problemas.

Para leer

El origen de algunas medidas

La necesidad de medir en la humanidad, originó el nacimiento de diversas unidades de medición que el día de hoy quedan como curiosidad, pero algunas de ellas se siguen usando:

La milla es una unidad de longitud surgida en Roma y equivalía a la distancia recorrida en mil pasos.

La pulgada tiene su origen en la medida del ancho de la primera falange del dedo pulgar, tenía diferentes valores, dependiendo del pulgar que se tomara como referencia.

La legua equivalía a la distancia que una persona podía avanzar a pie en una hora; por supuesto, esta medida también tenía diferentes valores, que podían variar entre los 4 y 7 kilómetros.

¿Puedes imaginar el origen de la medida llamada pie?

De un sistema a otro

Aprendizaje esperado: Resuelve problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).

Contenido: Conversión de unidades entre sistemas.

Para arrancar

1. En conjunto con un compañero observen y analicen la siguiente situación.

La familia Montes quiere comprar el tractor que le dé el mejor rendimiento.

a) ¿Cuál de los dos tractores conviene comprar? ______________________

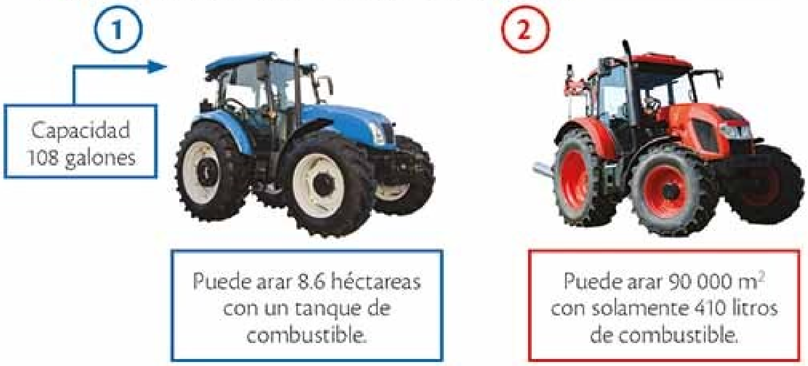


FIGURA 20.1 Comparativo entre dos tipos de tractores.

- ¿Por qué? ______________________

b) Escriban brevemente en su cuaderno la estrategia que utilizaron para decidir cuál de los tractores es el de mayor rendimiento.

Reto

1. Reúnete con dos compañeros para resolver el siguiente reto.

Carlos y Dora lograron encontrar algunos clientes para sus mercancías, ahora, un primer problema que deben resolver es cómo encontrar equivalencias dentro del Sistema inglés de medidas.

a) Respondan cómo pueden expresar:

- Yardas en pulgadas.
- Pulgadas en yardas.
- Galones en onzas.
- Onzas en galones.
- Libras en onzas.
- Onzas en libras.

b) Comenten con otros equipos sus estrategias y resultados. En caso de que tengan resultados distintos, expongan en el grupo sus dudas.

Pistas

1. En los mismos equipos del Reto, lean y contesten las preguntas.
   - ¿Cuántos decímetros tiene un metro?
   - ¿Cómo calculan cuántos decímetros equivalen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 12, 234, *n* metros?
   - ¿Cómo se pueden calcular las equivalencias de una medida expresada en unidades de medida menor?
   - ¿Qué operación utilizan?
   - ¿Cuántos decímetros necesitan para formar un metro?
   - ¿A cuántos metros equivalen 20 dm, 60 dm, 200 dm y 560 dm?
   - ¿Cómo se pueden calcular las equivalencias de una medida expresada en unidades de medida mayor?
   - ¿Qué operación utilizan?

   Compartan con otras parejas sus resultados y opiniones y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Para analizar

Un nuevo reto

1. Forma nuevos equipos de trabajo para resolver el nuevo reto.

Para poder tener un panorama completo, Carlos y Dora tienen que saber también como representar las unidades del Sistema inglés en el Sistema Internacional y viceversa.

a) Respondan cómo pueden expresar:
- Pulgadas en centímetros.
- Centímetros en pulgadas.
- Galones en litros.
- Litros en galones.
- Onzas en mililitros.
- Mililitros en onzas.
- Onzas en gramos.
- Gramos en onzas.
- Libras en kilogramos.
- Kilogramos en libras.

Comenten con otros equipos sus estrategias y resultados. En caso de que sus resultados no coincidan, expongan sus dudas en el grupo y consulten con su profesor o profesora.

Se vale

Colaboración

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan por qué es necesario que Carlos y Dora sepan expresar en las unidades de ambos sistemas diferentes magnitudes.

Formalización

1. Reúnete con un compañeros y terminen de escribir las equivalencias.

Tanto el Sistema Internacional de medidas (SI) como el Sistema inglés tienen las unidades necesarias para medir diferentes tipos de magnitudes; es importante para mucha gente que tiene comercio internacional o contacto con ambos sistemas conocer las equivalencias en ambos y, generalmente, si se conoce alguna equivalencia en las diferentes unidades de medida, se pueden deducir las demás.

Unidades de longitud:

1 Yarda = 36 pulgadas = ____________ cm

1 Pulgada = 2.54 cm

Unidades de capacidad:

1 Galón = 3.785 litros (dm^3)

1 Onza líquida = 29.57 cm^3 (ml)

1 Galón = ____________ onzas líquidas

Unidad de masa:

Libra = 16 onzas

Libra = 453.592 g

1 onza = ____________ gramos

Termina de llenar la siguiente tabla sobre algunas equivalencias de medida entre unidades del Sistema Internacional y del Sistema Inglés. Si lo necesitas, agrega otras unidades de medida y sus equivalencias.

¿Qué mide?	Sistema Inglés	Sistema Internacional
Longitud	Pulgada	2.54 cm
	Pie	cm
	Yarda	m
	Milla	m
Masa	Libra	g
	Onza	28.35 g
Capacidad	Galón	l
	Onza líquida	29.57 ml

TABLA 20.1 Equivalencias entre sistemas.

Vuelve a leer el Reto y Un nuevo reto y compara la forma en que lo resolviste con lo que trabajaste en la lección. Comenta en el grupo dudas u observaciones que tengan respecto de las equivalencias entre ambos sistemas.

¡A practicar!

1. Resuelve lo que se indica.
   - **a)** Lalo tiene un carro al que le caben 55 litros de gasolina, y Gerardo tiene otro al que le caben 15 galones.
     - ¿A cuál de los dos le cabe más gasolina?

       ____
   - **b)** Lucio tiene que comprar unos clavos que midan más de 4 cm pero menos de 6 cm, sin embargo, en la tlapalería solamente manejan en pulgadas las medidas.
     - ¿De cuántas pulgadas los debe pedir?

       ____
   - **c)** Carlos exportará 6.5 toneladas de café a Estados Unidos; si le pagarán a $32.00 la libra.
     - ¿Cuánto dinero recibirá por la venta del café?

       ____
   - **d)** Dora exportará a Estados Unidos 20 barriles de miel con 200 litros cada uno, pero le han pedido que los mande en garrafas de 2 galones.
     - ¿Cuántas garrafas enviará?

       ____
   - **e)** Víctor recibe un correo electrónico de su hijo que vive en Toronto. En el correo le comenta que se compró a una casa en Montreal; ciudad que se encuentra a 330 millas de la ciudad de Toronto.
     - Víctor se pregunta qué tan lejos está la casa. ¿Podrías decir a qué distancia, en kilómetros, se encuentra la casa?

       ____
2. Haz lo que se indica.
   - **a)** Utiliza la tabla de equivalencias para calcular lo siguiente.
     - Si una yarda son 36 pulgadas, ¿cuántas pulgadas son 47 yardas? ____________
     - Si una pulgada son 2.54 cm, ¿cuántos cm son 32.5 pulgadas? ____________
     - Si un galón equivale a 3.785 litros, ¿a cuántos litros equivalen 17.8 galones? ____________
     - Si una libra equivale a 16 onzas, ¿a cuántas onzas equivalen 23.2 libras? ____________
   - **b)** Escribe en tu cuaderno cómo calculaste en cada caso las equivalencias.

Compara tus respuestas con las de otros estudiantes y en caso de dudas consulten con su maestra o maestro.

Para terminar

1. En parejas contesten las siguientes preguntas. Repasen la lección y comenten grupalmente las preguntas y respuestas en las que estuvieron dudas.
   - **a)** ¿Cuáles son las unidades de longitud en el SI y en el Sistema inglés?
   - **b)** ¿Cuáles son las unidades de capacidad en el SI y en el Sistema inglés?
   - **c)** ¿Cuáles son las unidades de masa en el SI y en el Sistema inglés?
   - **d)** ¿Cuáles son las unidades de tiempo en el SI y en el Sistema inglés?

Portafolio de evidencias

Elige para tu portafolio de evidencias algún trabajo sobre la conversión de unidades de longitud de un sistema a otro.

2. En tu cuaderno escribe brevemente qué conocimientos adquiriste con la lección respecto de la representación en unidades equivalentes entre el Sistema internacional de medidas y el Sistema inglés de medidas y qué dudas tienes.

Compara con lo escrito por otros estudiantes y, en caso necesario, consulten con su maestro o maestra.

TIC

1. Reúnete con dos compañeros y hagan las siguientes tablas de equivalencias para medidas de longitud en una hoja de cálculo electrónica.
   a) Observen bien las fórmulas que se usarán.

	A	B	C
1	Equivalencias en unidades		
2	Sistema inglés		SI
3	Pulgadas	Yardas	Centímetros
4		=A4/36	=A4*2.54
5	Sistema inglés		SI
6	Yardas	Pulgadas	Centímetros
7		=A7*36	=B7*2.54
8	SI	Sistema inglés	
9	Centímetros	Pulgadas	Yardas
10		=A10/2.54	=B10/36
11			

FIGURA 20.2 Equivalencia en unidades con una hoja de cálculo.

- ¿Por qué se divide entre 36 en la celda B4?
- ¿Por qué se multiplica por 2.54 en la celda C4?
- ¿Por qué se divide entre 2.54 en la celda B10?
- ¿Por qué se multiplica por 36 en la celda B7?

Cuando escriban alguna cantidad en cualquiera de las celdas amarillas, la hoja calculará automáticamente la equivalencia en las otras unidades de medida.

   b) Elaboren otras tablas para calcular las equivalencias en medidas de capacidad y de masa de ambos sistemas de medidas.

Para leer

El comercio con Estados Unidos

El flujo de mercancías entre México y Estados Unidos es constante e involucra varios miles de millones de pesos cada año, es interesante destacar que según un reportaje de la cadena de noticias CNN de 2017, los cinco productos que más vendió Estados Unidos a México en 2016, fueron:

Maíz, carne de puerco, pollo, trigo y leche en polvo. Estos productos representan el 41% del total de las importaciones agroalimentarias de México.

Y la revista Regeneración, en 2017 también, comentó que de acuerdo con el Observatorio de la Complejidad Económica, lo que más ha importado Estados Unidos de México es: cerveza, jitomate, aguacate, tequila y pimiento.

Si quieres leer más al respecto, puedes entrar a los sitios mostrados abajo.

http://cnnespanol.cnn.com/2017/07/30/los-5-productos-de-ee-uu-que-alimentan-a-mexico/ y https://regeneracion.mx/los-5-productos-que-mas-importa-eu-de-mexico/ (Sitios consultados el 3 de abril de 2018).

Solamente el contorno

Aprendizaje esperado: Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Contenido: Perímetro de polígonos regulares e irregulares; Perímetro del círculo.

Para arrancar

1. Reúnete con un compañero, observen y analicen la siguiente figura geométrica.

Isaac caminó con su perro tres vueltas al parque, si los lados cortos miden 12.5 m y los largos, el doble que los lados cortos, ¿cuántos metros recorrieron Isaac y su mascota?

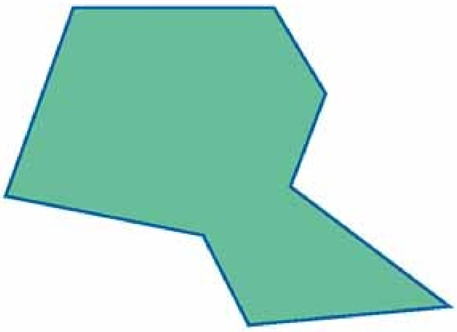


FIGURA 21.1 Plano del parque.

Reto

1. Trabaja en conjunto con dos compañeros y resuelvan el siguiente reto.

En 1873, James Starley, un inventor inglés, construyó una máquina que tenía todas las características de la bicicleta actual. Se le llamaba bicicleta de rueda alta; esta rueda era cuatro veces más grande que la que usaba en la parte trasera.

Lo anterior quiere decir que, si el diámetro de la segunda rueda medía 30 cm , el diámetro de la primera medía 120 cm. Supón que éstos son los valores reales y toma el valor de π como 3.14.

FIGURA 21.2 Bicicleta de rueda alta.

LECCIÓN 21

a) Completen la tabla con las estimaciones de tres equipos a las preguntas.

Pregunta	Equipo 1	Equipo 2	Equipo 3
¿Cuánto avanza la rueda delantera cada vez que da un giro completo?			
¿Cuánto avanza la rueda trasera cada vez que da un giro completo?			
¿Cuántos giros da la rueda trasera mientras la delantera da un giro completo?			

TABLA 21.1 Estimación de las distancias avanzadas por las ruedas de una bicicleta de rueda alta.

Se vale

Colaboración

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan cuál es la relación de avance entre las ruedas de la bicicleta.

b) Hagan los cálculos necesarios para saber las respuestas correctas y observen cuál de los tres equipos estuvo más cerca en sus estimaciones.

c) Expongan su trabajo ante el grupo y, en caso de dudas, consulten con su docente.

Pistas

e

1. Con el mismo equipo del Reto, hagan lo que se indica.

- Tracen en su cuaderno un círculo de radio 6 cm (recuerden que un radio en un círculo, mide la mitad del diámetro), así quedará un círculo de 12 cm de diámetro que estará a escala de la rueda mayor de la bicicleta.

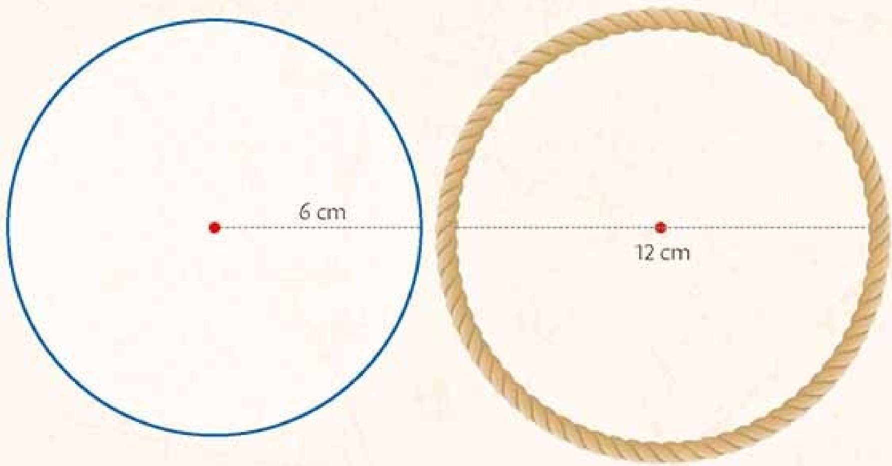


FIGURA 21.3 Comparación del contorno con el diámetro en una circunferencia de 6 cm de radio.

- Con un cordel midan cuidadosamente el contorno del círculo.
- Midan con una regla el tamaño del cordel que cubrió el contorno y anoten la medida.
- Si lo que anotaron como medida es lo que corresponde al círculo a escala ¿cuánto medirá la rueda real?
- Comparen la medida del contorno con el diámetro del círculo, ¿cuántas veces cabe el diámetro en la medida del contorno?
- Hagan lo mismo con la rueda menor y observen si el diámetro cabe el mismo número de veces que con la rueda grande.
- Compartan con otros equipos sus resultados y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Para analizar

Un nuevo reto

1. Forma un equipo con dos de tus compañeros, observen la figura y respondan las preguntas.

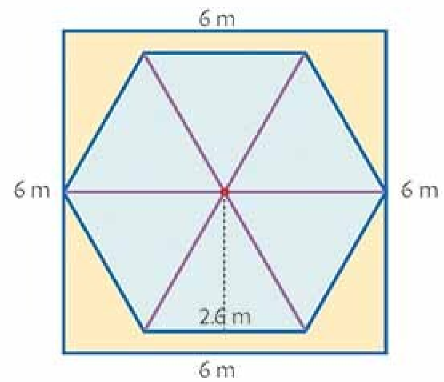


FIGURA 21.4 Hexágono y cuadrado.

a) ¿Cuánto mide el **perímetro** del cuadrado? __________

b) ¿Cuánto mide el perímetro del hexágono? __________

c) ¿Cuánto mide cada una de las líneas moradas que forman los triángulos? __________

d) Comparen sus respuestas con las de otros equipos y en caso de dudas consulten con su maestro o maestra. En caso de que tengan dudas expónganlas en el grupo.

Se vale

Empatía

Cada uno de los integrantes del equipo, debe escuchar con atención las diferentes opiniones y argumentos, tanto en acuerdo como en desacuerdo, para tomar la mejor decisión. Comenten por qué es bueno escuchar diferentes opiniones antes de tomar una decisión.

Glosario

Perímetro. Medida del contorno o la orilla de una figura.

Formalización

Como lo estudiaste en la primaria, los perímetros se calculan en unidades lineales y, como recordarás, basta sumar las medidas de cada uno de los lados de la figura o aplicar la fórmula correspondiente en el caso del círculo.

En el círculo

Para calcular la longitud de una circunferencia (perímetro del círculo) es necesario conocer la longitud de su diámetro. Si colocan la longitud del diámetro a lo largo de la circunferencia, se darán cuenta de que cabe tres veces y queda una pequeña parte sin cubrir, esto es, el diámetro cabe un número —llamado *pi*, el que se representa con la letra griega del mismo nombre: *pi* = π — de veces en la circunferencia. π es un número irracional, es decir, no puede obtenerse como resultado de dividir dos números enteros, y se caracteriza por tener una cantidad infinita de cifras decimales.

Aunque π tiene una expresión decimal infinita, sabemos que la aproximación más cercana con cuatro cifras decimales es 3.1416, o bien, sólo 3.14, con dos cifras decimales.

Para comprobar lo anterior, tracen una circunferencia con diámetro de 10 cm. Después corten un cordón de 10 cm y midan con él la circunferencia.

¿Cuántas veces cupo?

____

¿Quedó un número exacto de veces?

____

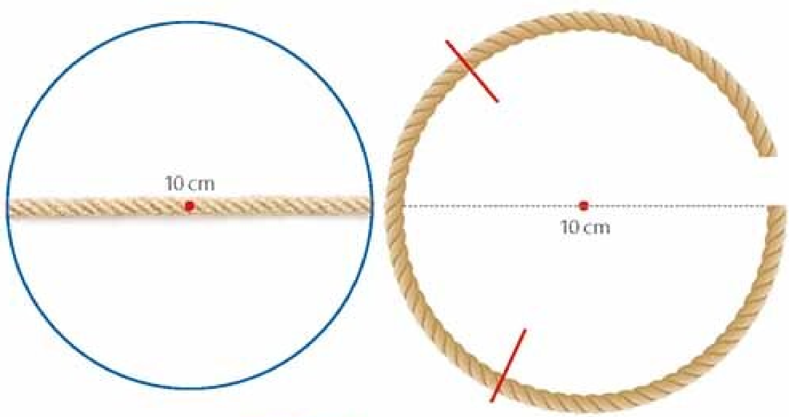


FIGURA 21.5 Comparación entre la longitud del diámetro y la circunferencia de un circulo.

Ahora que han comprobado la relación entre *pi* y la longitud de la circunferencia, podemos decir que el factor de proporcionalidad entre el perímetro de un círculo y su diámetro es *pi*. Esto se expresa de la siguiente manera:

Longitud de la circunferencia = *pi* × diámetro

Glosario

Polígono. Figura geométrica cerrada con varios ángulos internos. Si tiene todos sus ángulos internos iguales será un polígono regular o equilátero.

En los polígonos regulares

Por ejemplo:

En el caso de un triángulo equilátero, para calcular el perímetro podemos usar las siguientes fórmulas:

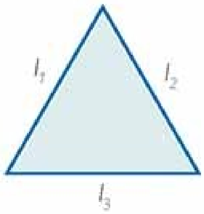


FIGURA 21.6 Triángulo equilátero.

____ + ____ + ____ = p, o también ____ × ____ = p

En los casos de las figuras cuyos lados miden lo mismo, la suma de los lados puede expresarse como una multiplicación.

En el hexágono podemos expresar el perímetro como:

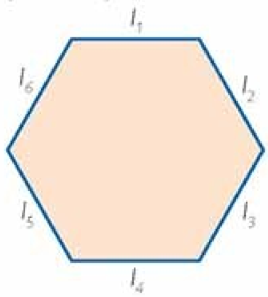


FIGURA 21.7 Hexágono regular.

____ + ____ + ____ + ____ + ____ + ____ = p, o también como ____ × ____ = p .

Así, podemos emplear la siguiente fórmula para calcular el perímetro de cualquier polígono regular: $N \times l = p$, donde N es el número de lados.

En los polígonos irregulares

Para el cálculo del perímetro de los polígonos irregulares, no hay una fórmula, solamente bastará con sumar sus lados o en caso posible, usar suma y multiplicación.

Por ejemplo:

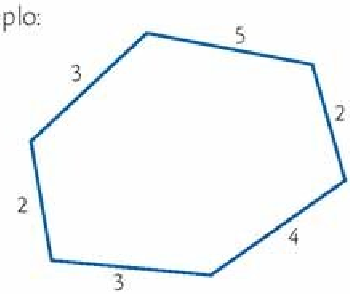


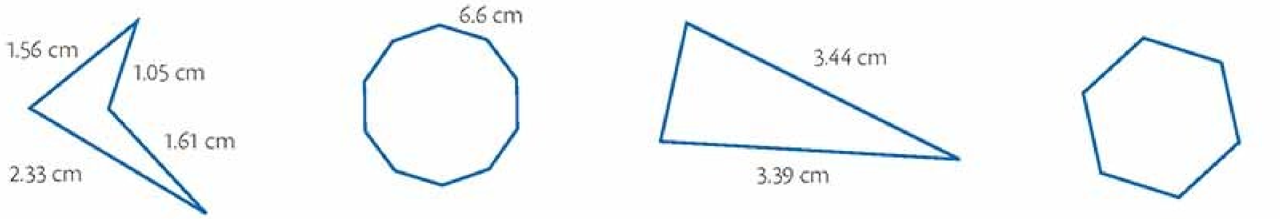
FIGURA 21.8 Hexágono irregular.

____ + ____ + ____ + ____ +
____ + ____ = p, o también como
(____ × ____) + (____ × ____)
+ ____ + ____ = p.

Vuelve a leer el Reto y Un nuevo reto y compara tus respuestas con lo estudiado anteriormente.

¡A practicar!

1. Calcula lo solicitado, el perímetro o la medida de uno de los lados de cada polígono.



Perímetro =	Perímetro =	Perímetro = 8.18 cm Lado faltante =	Perímetro = 49.5 cm Lado =

2. Doña Catalina quiere construir un gallinero, y para cercarlo, tiene 4.8 metros de tela de alambre. Escribe en los siguientes diseños las medidas que tendría cada gallinero.

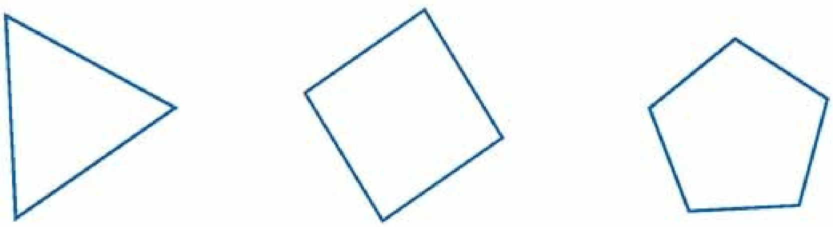


FIGURA 21.9 Diferentes diseños para el gallinero de doña Catalina.

3. Resuelve los siguientes problemas.

a) Para mantenerse saludable Israel corre cada día 3 vueltas al parque, ¿cuántos metros corre de lunes a sábado? ________________

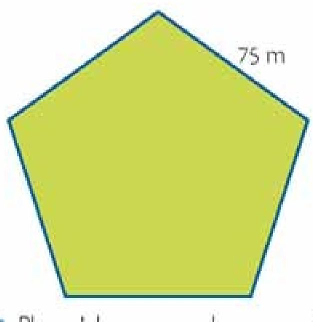


FIGURA 21.10 Plano del parque en el que corren Israel y Alba.

b) Alba corre en el mismo parque que Israel y dice que en tres días ha corrido 5 625 m; si cada día corre lo mismo, ¿cuántas vueltas le da al parque en un día? ________________

4. Isaac quiere coser al contorno del mantel una vuelta de bies, una especie de listón que se usa para evitar que las prendas se deshilachen. ¿Cuánto bies necesita?

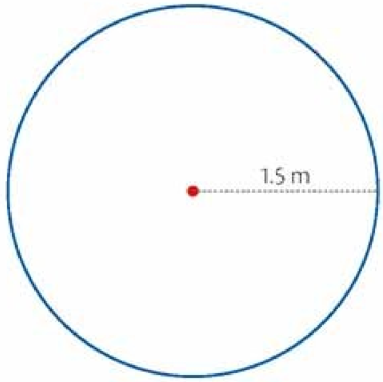


FIGURA 21.11 Patrón de un mantel de forma circular.

5. ¿Cuánto mide el perímetro del cuadrado?, y ¿cuánto el del círculo?

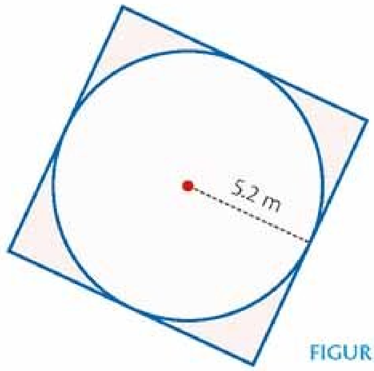


FIGURA 21.12

6. Reúnete con un compañero e inventen problemas que impliquen el cálculo de perímetros en polígonos regulares, irregulares o en el círculo y resuélvanlos.

Comparen las respuestas con las de sus compañeros, y en caso de dudas coméntenlo de manera grupal. Si es necesario completen su trabajo.

Para terminar

1. En parejas contesten las siguientes preguntas. Repasen la lección o comenten grupalmente las preguntas y respuestas en las que tuvieron dudas.
   a) ¿Qué es el perímetro de una figura?
   b) ¿Cómo se calcula el perímetro de un círculo?
   c) ¿Cómo calculas el perímetro de un círculo si solamente conoces la medida del radio?
   d) ¿Qué significa π en el cálculo del perímetro del círculo?
   e) ¿Cuál es el valor de π redondeado a dos cifras decimales?, ¿y a cuatro decimales?
   f) ¿Cómo se calcula el perímetro de cualquier polígono de lados rectos?
   g) ¿Cómo se calcula el perímetro de polígonos regulares?

Portafolio de evidencias

Elige para tu portafolio de evidencias la solución al Reto, a Un nuevo reto y algún trabajo sobre el cálculo del perímetro en polígonos regulares, irregulares o en el círculo.

2. En tu cuaderno escribe brevemente qué conocimientos adquiriste con la lección respecto del cálculo de perímetros de polígonos regulares, irregulares y del círculo y qué dudas tienes. Compara con lo escrito por otros estudiantes y, en caso necesario, consulten con su maestro o maestra.

TIC

1. En equipos, hagan estas actividades en una computadora.

a) Construyan en una hoja de cálculo electrónica una tabla, que les permita calcular el radio, el diámetro o la longitud de la circunferencia dado uno de ellos.

	A	B	C
1	Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia
2	4	8	25,1327408
3			
4			
5	Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia
6	4	8	25,1327408
7			
8			
9	Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia
10	4	8	25,1327408
11			

=A2*2

=B2*3.1415926

=B6/2

=C10/3.1415926

FIGURA 21.10 Tabla para calcular perímetros en una hoja de cálculo.

b) Usen las tablas para resolver problemas.

Para leer

El número π

En la Universidad de Tokio, en 1995, con ayuda de una supercomputadora calcularon el valor de π con una exactitud de 4 294 960 000 cifras decimales. ¡Sorprendente! ¿Verdad?

Y sin embargo, no es el valor exacto de π ya que este número es **INCONMENSURABLE**.

Glosario

Inconmensurable. Que no se puede medir, calcular o cuantificar.

El área de una superficie

Aprendizaje esperado: Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Contenido: Uso de las fórmulas del cálculo de área de triángulos y cuadriláteros para calcular el área de polígonos irregulares y regulares.

Para arrancar

p

1. Reúnete con un compañero y escriban en su cuaderno:
   - **a)** Cómo calcular el perímetro de un pentágono con lados de diferentes longitudes.
   - **b)** Cómo calcular el perímetro de un pentágono regular.
   - **c)** Qué datos necesitan conocer para calcular el área de:
     - Un cuadrado
     - Un triángulo
     - Un polígono regular

Comparen sus respuestas con otra pareja y, en caso necesario, rectifiquen o agreguen lo que les haga falta.

Reto

e

1. Haz equipo con otros dos compañeros y resuelvan el siguiente reto.

En lugar de comprar galletas, Luis decide hacerlas para reducir costos y controlar la calidad de los ingredientes. Tiene varios moldes para hacerlas y quiere hacer las que tengan mayor volumen.

Él sabe que el molde que tenga mayor superficie en la base, será también el de mayor volumen, pues todos los moldes tienen la misma profundidad.

Observa los moldes medidos en centímetros.

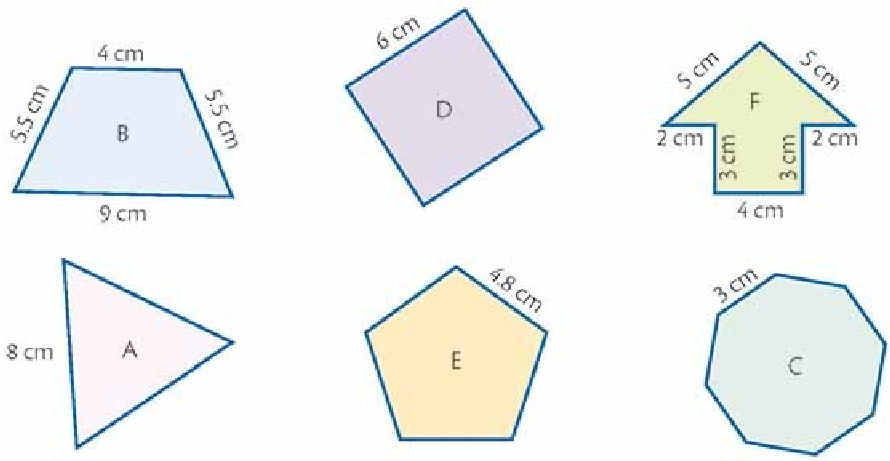


FIGURA 22.1 Dimensiones de los moldes para galletas que tiene Luis.

- **a)** Contesten las preguntas en su cuaderno.
  - ¿Cuál molde le conviene usar a Luis si quiere el de mayor área en la base?
  - ¿Por qué?

- ¿Cuánto mide el perímetro de cada molde?
- ¿Cómo pueden saber si hay moldes con áreas equivalentes?
- ¿Cuál molde tendrá menor área? Y, ¿cuál tendrá más?
- ¿Cómo pueden calcular el área de cada molde?
- ¿Hay alguna fórmula para calcular el área del molde en forma de flecha?
- ¿Con los datos que tienen pueden calcular el área de la base de cada molde?
- ¿Por qué?
- ¿Habrá una relación directa entre el perímetro y el área de polígonos regulares?
- ¿Los polígonos regulares con el mismo perímetro tendrán la misma área?

b) Compara con tus compañeros de otros equipos las respuestas que obtuvieron.

- ¿Todos obtuvieron los mismos resultados?
- Si hay duda respecto de alguna de las respuestas de cualquiera de tus compañeros, pídele que justifique su respuesta.
- Si sabes de una receta para elaborar galletas, compártela en tu grupo.

Pistas

1. Con el mismo equipo del Reto, lean lo siguiente y hagan lo que se indica.

Luis decidió hacer dibujos de los moldes cuadriculando cada uno.

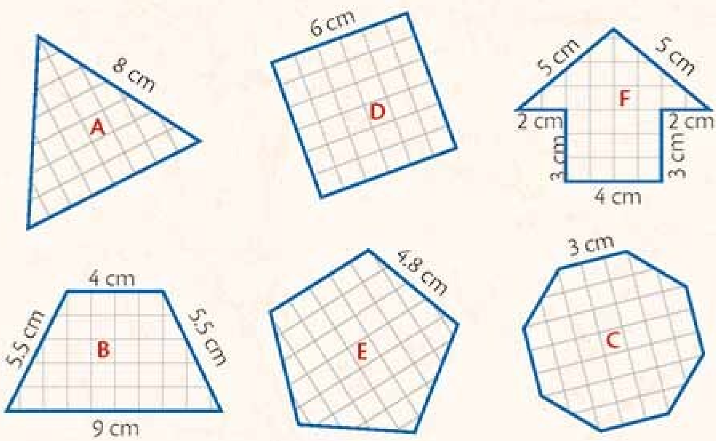


FIGURA 22.2 Dibujos de los moldes para galletas de Luis con una cuadricula en la que la longitud del lado de un cuadrado corresponde a un centimetro.

Observó que las áreas son diferentes y que el molde triangular es el que tiene menos área porque se forman menos cuadrados en su interior.

En el molde cuadrado no tuvo problema para calcular el área porque salieron cuadrados exactos.

De los demás moldes tiene duda, porque no puede contar bien los cuadrados interiores.

Sabe la medida de cada lado de los moldes y también sabe cómo calcular el área:

- Lo puede calcular descomponiendo las figuras en triángulos o cuadriláteros.
- Lo puede calcular usando fórmulas.

a) Respondan las siguientes preguntas.
- ¿Qué opinas del método que usó Luis para calcular las áreas?
- ¿Qué datos le faltan para poder calcular el área de cada polígono?
- En los dibujos que hizo Luis, ¿cómo podrá saber cuánto miden los datos que le faltan?

b) Describan en su cuaderno cómo hubieran calculado las superficies de las bases de los moldes.

c) Compartan con otros equipos sus resultados y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Para analizar

Un nuevo reto

1. A partir de los datos que tiene el octágono, respondan lo siguiente:

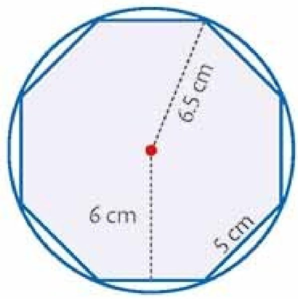


FIGURA 22.3 Octágono.

a) ¿Qué representa el dato de 6 cm? ____________

b) ¿Qué representa el dato de 6.5 cm? ____________

c) ¿Qué figura se forma al trazar dos radios que parten de dos vértices consecutivos del polígono? ____________

d) ¿Cuál es el área del polígono? ____________

e) Comparen sus respuestas con las de otros compañeros y, en caso de duda, pidan que justifiquen sus respuestas.

f) Expongan su trabajo ante el grupo y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Se vale

Colaboración:
Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan la relación entre la longitud de un lado y el área para diferentes polígonos.

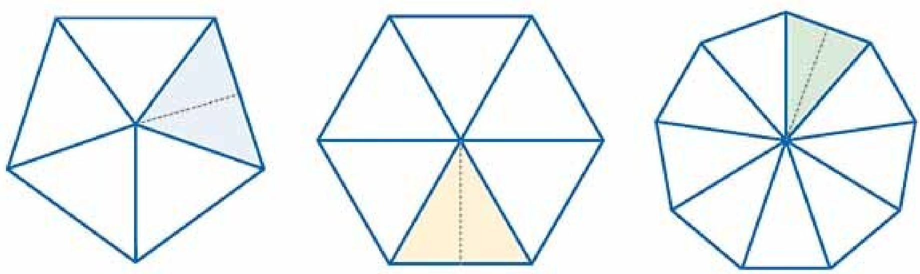
Formalización

Calcular el área de un **polígono** es conocer cuántas unidades cuadradas caben en su interior.

Los polígonos regulares, como los siguientes, se pueden dividir en tantos triángulos congruentes como lados tengan; entonces, se puede conocer su área calculando previamente el área de uno de sus triángulos y multiplicando por el número de triángulos que tenga:

Glosario

Polígono. Figura geométrica cerrada con varios ángulos internos. Si tiene todos sus ángulos internos iguales será un polígono regular o equilátero.



$A = \frac{b \times h}{2} \times 5$ $\qquad$ $A = \frac{b \times h}{2} \times 6$ $\qquad$ $A = \frac{b \times h}{2} \times 9$

FIGURA 22.4 Área del pentágono, hexágono y nonágono a partir de su división en triángulos congruentes.

Apóyate en la **FIGURA 22.5** y contesta.

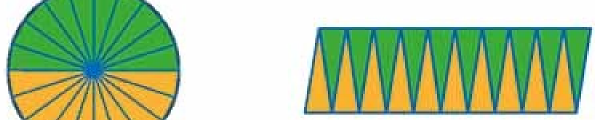


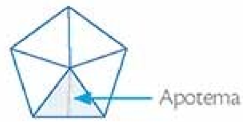
FIGURA 22.5 Cuadrilátero formado con los triángulos congruentes trazados desde el centro de un polígono de veinte lados.

Si para calcular el área del polígono calculas el área de todos los triángulos a la vez.

- ¿Cómo calculas lo que miden todas las bases de los triángulos que se forman?
- ¿En todos los triángulos miden lo mismo sus alturas (o **apotemas** en este caso)?, ¿cómo lo sabes?
- ¿Con cuál de las siguientes formas calculas el área de todos los triángulos formados? Justifica tu repuesta.
- Multiplico el perímetro del polígono (suma de todas las bases de los triángulos) por la medida de uno de los lados de uno de los triángulos que llega al centro del polígono y el resultado lo divido entre dos.
- Multiplico el perímetro del polígono (suma de todas las bases de los triángulos) por la medida de la apotema de un triángulo y el resultado lo divido entre dos.
- Multiplico el perímetro del polígono (suma de todas las bases de los triángulos) por la medida de la apotema.

Glosario

Apotema. Segmento perpendicular del centro de un polígono regular al punto medio de uno de sus lados.



Escribe con una fórmula tu respuesta, toma en cuenta lo siguiente y usa lo necesario:

A significará Área
p significará perímetro
l significará medida del lado del triángulo que llega al centro del polígono
n significará número de lados
a significará apotema

En el caso de los polígonos irregulares, deben saber que:

Si se divide en otros polígonos y se calculan sus áreas, el área total es igual a la suma de las áreas parciales.

Así, el área total del polígono *PUMAS*, es igual al área del polígono I más el polígono II

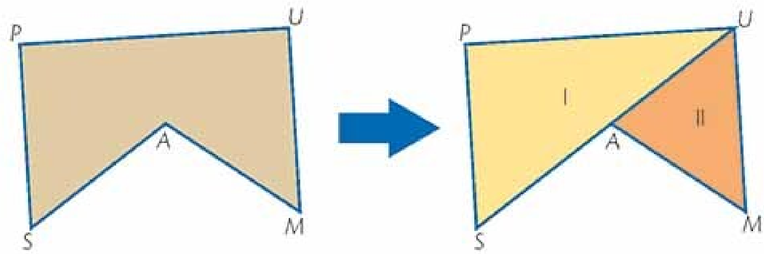


FIGURA 22.6 Pentágono irregular dividido en polígonos conocidos para calcular su área.

Así que, en el caso de los polígonos irregulares, bastará con dividirlos en triángulos o paralelogramos, calcular las áreas parciales y sumarlas para obtener el área total.

¿Cómo dividirían el polígono *VICTOR* para calcular su área?

Vuelve a leer el Reto y Un nuevo reto, y de ser necesario, completa tu respuesta con lo estudiado anteriormente.

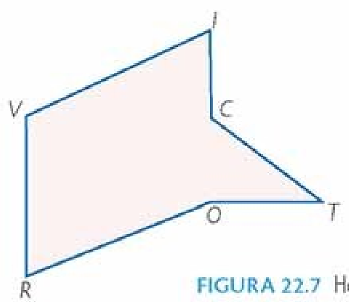
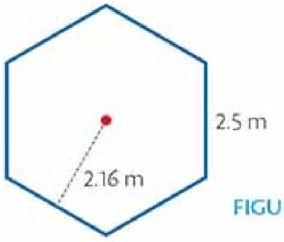


FIGURA 22.7 Hexágono irregular.

¡A practicar!

1. La zona interna de un campo de beisbol tiene forma de cuadrado; los bateadores corren 27.4 metros desde la base de bateo (*home*) a la primera base.
   a) ¿Qué distancia tiene que correr un jugador para hacer una carrera?
   b) ¿Qué área ocupa el cuadrado del campo de beisbol?



2. ¿Cuántas cajas de loseta se tendrán que comprar para cubrir el piso de una pileta hexagonal que tiene las dimensiones de la FIGURA 22.8? Cada caja contiene 1.5 m^2 de loseta.

FIGURA 22.8 Dimensiones de una pileta con forma de hexágono.

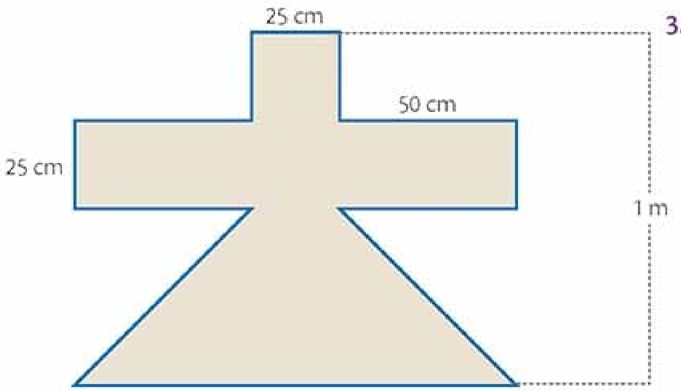


FIGURA 22.9 Patrón para hacer un vestido para muñecos.

3. Para adornar el salón, hay que vestir a 10 muñecos del mismo color, con un vestido como el de la FIGURA 22.9:

a) Estima si cada vestido necesita más o menos de un metro cuadrado de material

b) Responde las siguientes preguntas.

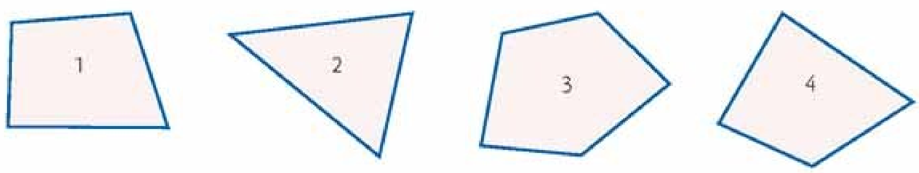
- ¿Calcula cuánto material se necesita por vestido?
- ¿Cuánto material se necesitará en total?
- ¿Cuánto material comprarías para cortar los 10 vestidos?
- ¿Por qué?
- ¿Hay una fórmula para calcular el área del vestido?
- ¿Por qué?

c) Escribe en tu cuaderno la estrategia que usaste para resolver el problema.

d) Comparte con tus compañeros las estrategias y respuestas a los problemas. En caso de ser necesario, revisen en equipos los trabajos para validar sus respuestas.

4. Mide lo que necesites de los siguientes polígonos en cm. Si cada cm representa 100 m y cada polígono un lote, ¿Cuál es el de mayor área y cuál el de menor?

FIGURA 22.10 Polígonos irregulares.



- ¿Algunos representan la misma área?
- Traza en tu cuaderno otro polígono que represente la misma área del polígono mayor.

5. Inventa dos problemas que impliquen calcular el área de polígonos, uno con un polígono regular y otro con uno irregular.

Portafolio de evidencias

Elige para tu portafolio de evidencias, la solución al Reto y algún trabajo sobre el cálculo del área de polígonos regulares o irregulares.

Para terminar

1. En parejas contesten las siguientes preguntas. Repasen la lección o comenten grupalmente las preguntas y respuestas en las que tuvieron dudas.

a) ¿Cómo se calcula el área de cualquier triángulo?

b) ¿Cómo se calcula el área de cualquier cuadrilátero **paralelogramo**?

c) ¿Cómo se calcula el área de cualquier polígono regular?

d) ¿Cómo se calcula el área de cualquier polígono irregular con lados rectos?

Glosario

Paralelogramo. Cuadrilátero con dos pares de lados paralelos.

2. En tu cuaderno escribe brevemente qué conocimientos adquiriste con la lección respecto del cálculo de áreas de polígonos regulares e irregulares apoyándose en las fórmulas del triángulo y cuadriláteros y qué dudas tienes. Compara con lo escrito por otros estudiantes y en caso necesario consulten con su maestro o maestra.

TIC

1. Realicen en equipo la siguiente tabla para calcular el área de triángulos y paralelogramos y úsenla para calcular el área de polígonos irregulares.

	A	B	C
1		**Paralelogramos**	
2	Base	Altura	Área
3			=A3*B3
4	Base	Altura	Área
5		=C5/A5	
6	Base	Altura	Área
7	=C7/B7		
8		**Triángulos**	
9	Base	Altura	Área
10			=A10*B10/2
11	Base	Altura	Área
12		=C12/A12	
13	Base	Altura	Área
14	=C14/B14		
15			

FIGURA 22.11 Tabla elaborada en una hoja de cálculo para determinar el área y dimensiones de paralelogramos y triángulos.

a) Comenten al interior del equipo y con otros equipos qué significan las fórmulas:
=A3*B3
=C5/A5
=A10*B10/2
=C12/A12
=C14/B14

- Observen bien las fórmulas, las celdas amarillas son para que escriban los datos conocidos y en las celdas azules se mostrará el dato faltante.

Para leer

Los polígonos regulares y el círculo

Cuando se trazan polígonos regulares, cuantos más lados tienen, la apotema se acerca cada vez más a la medida del radio y el polígono se acerca cada vez más a la circunferencia que lo inscribe, llegando un momento en que el polígono se confunde con la circunferencia y la apotema con el radio.

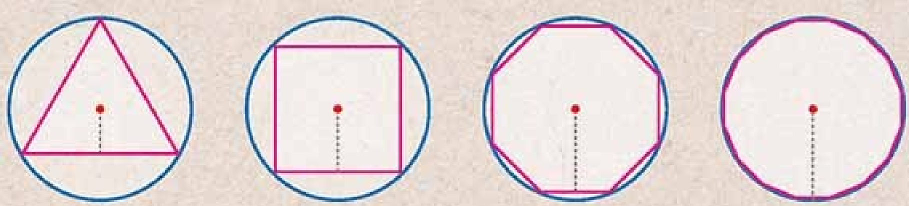


FIGURA 22.12 Diferentes polígonos regulares inscritos en una circunferencia.

El área del círculo

Aprendizaje esperado: Calcula el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.

Contenido: Cálculo del área del círculo.

LECCIÓN 23

Para arrancar

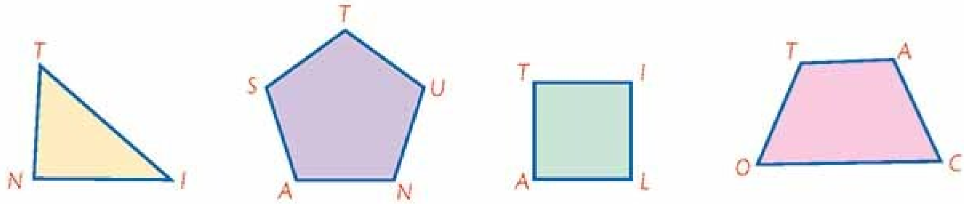
p

1. Escribe brevemente qué entiendes por:

Perímetro: ____________________

Área: ____________________

2. Compara tus respuestas de la actividad anterior con las de otro compañero y en conjunto escriban debajo de cada figura geométrica una fórmula para calcular su perímetro y su área.



$P =$ ________ $P =$ ________ $P =$ ________ $P =$ ________

$A =$ ________ $A =$ ________ $A =$ ________ $A =$ ________

FIGURA 23.1 Perímetro y área de polígonos.

- Compartan sus respuestas en plenaria y en caso necesario, rectifiquen o agreguen lo que les haga falta.

Reto

e

1. Reúnete con dos compañeros y resuelvan el siguiente reto.

Durante un paseo por el campo, Lalo, Luis, Cata y Víctor ven un borrego atado con una cuerda a un poste.

a) Si la longitud de la cuerda del borrego es de 10 metros.

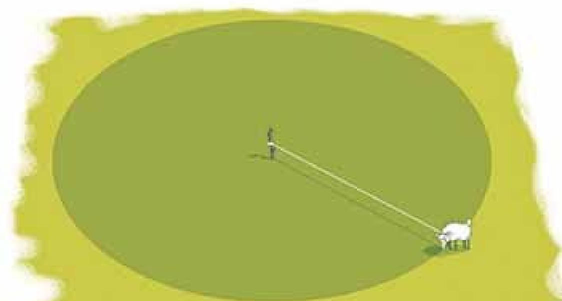


FIGURA 23.2 Área en la que puede pastar el borrego.

- ¿De cuántos metros es el recorrido máximo del borrego en cada vuelta?
- ¿En cuántos metros cuadrados puede pastar?

b) Consideren ahora una cuerda con el doble de tamaño de la cuerda original.
- ¿El giro máximo del borrego también es del doble? Expliquen.
- ¿El área para pastar también es del doble? Expliquen.

c) Hagan los cálculos necesarios si la cuerda del borrego es de 2.5 *m* y contesten.
- El giro máximo del borrego en cada vuelta es de:
- El área para pastar es de:
- ¿Cómo varía el área del círculo cuando el radio es la mitad o el doble del original?
- ¿Cómo varía el perímetro del círculo cuando el radio es la mitad o el doble del original?

d) Comparen sus procedimientos y respuestas con sus compañeros, y coméntenlos entre ustedes y su profesor

Pistas

1. Lean lo siguiente y contesten las preguntas.

Si consideran que el círculo es un polígono regular con un número muy grande de lados.
- ¿Qué representa la cuerda en el problema?
- ¿Cómo aplicarían la fórmula para el cálculo del área de polígonos regulares en el cálculo del área del círculo?

2. Realicen lo que se indica.

a) Salgan al patio de la escuela y con ayuda de una cuerda, un gis y un metro tracen círculos concéntricos de 1, 2, 3, 4 y 5 metros de radio.

b) Registren en su cuaderno los datos y resultados del ejercicio.

c) Usen sus conocimientos sobre proporcionalidad para calcular el perímetro y el área en los que puede pastar y caminar el borrego.

d) Calculen cada vez los perímetros y áreas de los círculos y observen la diferencia entre cada uno.

e) Si el radio del círculo aumenta un metro cada vez, ¿cuánto cambia cada vez el perímetro y el área?

f) ¿Cómo calcularon el perímetro y cómo el área del círculo en el que puede andar y pastar el borrego?

g) Compartan con otras parejas sus resultados y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Para analizar

Un nuevo reto

Reúnete con dos compañeros, lean la siguiente información y realicen lo que se indica.

Una mañana, en las ciudades de Hampshire y Wiltshire en Inglaterra, aparecieron diferentes círculos en los campos agrícolas.

La gente, en un principio, llegó a creer que eran obra de extraterrestres y sus naves espaciales, pero un hombre llamado John Lundberg demostró que esos círculos eran fácilmente realizados por personas. Lundberg probó ante las cámaras que estos diseños, dentro de los cuales la hierba estaba aplastada, pueden elaborarse en una noche. Y también demostró que para ello sólo se necesita una cinta métrica, una cuerda y un tablón de madera.

Para comprobar la facilidad con la que se hacen estos círculos, comenzó con algunos que tenían de tres a ocho metros de diámetro, y conforme fue avanzando su demostración los círculos dieron paso a figuras cada vez más complicadas.

Los aficionados a estos diseños comenzaron haciendo tres figuras al mes; en poco tiempo, podían producir cientos en ese mismo lapso, y algunos diseños ya alcanzaban extensiones de hasta 240 m de diámetro.

FIGURA 23.3 Círculos en campos.

1. En la figura se representan tres círculos trazados con 6, 12 y 24 metros de radio.
   a) Respondan las siguientes preguntas.
   - ¿Qué área abarcaba el diseño que tenía 6 metros de diámetro?
   - ¿Qué área abarcaba el diseño que tenía 12 metros de diámetro?
   - ¿Qué área abarcaba el diseño que tenía 24 metros de diámetro?
   - ¿Qué perímetro y qué área abarcaba el diseño que tenía 240 metros de diámetro?
   - ¿Cabría en el patio de su escuela?

   b) Comparen sus procedimientos y respuestas con otros equipos. Luego comenten al respecto con todo el grupo y con su profesor.

Se vale

Colaboración

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan por qué solo se necesita conocer la medida del radio o del diámetro para poder calcular el perímetro y el área del círculo.

Formalización

Observen cómo el número π también se relaciona con el área del círculo:

El área de los polígonos regulares se calcula con la fórmula:

$$Área = \frac{perímetro \times apotema}{2}$$

Si se considera al círculo como un polígono regular de un número extremadamente grande de lados, se puede aplicar la misma fórmula, pero hay que considerar lo siguiente:

En la fórmula aparecen el perímetro y la apotema. Completa los párrafos que aparecen a continuación para cada caso.

c) Cálculo del perímetro de un círculo

Se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$P = \pi \times D$$

donde D es la medida del diámetro, pero consideren que el diámetro expresado en radios es igual a:

$D =$ ________ por lo que sustituyendo D por ________, también el perímetro del círculo se puede calcular con la fórmula

$$P = \pi \times 2 \times r$$

Sustituye en la fórmula para el cálculo del área de polígonos la expresión que corresponde al perímetro del círculo expresada en radios.

$$Área = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_ \times apotema}{2}$$

d) La apotema en el círculo

En un círculo, si observas podrás ver que la apotema corresponde al ________ del círculo, entonces $a = r$

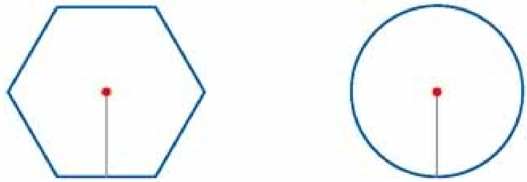
Sustituye en la fórmula para el cálculo del área de polígonos la expresión que corresponde al perímetro del círculo expresada en radios y a la apotema por el radio.

$$Área = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_ \times \_\_\_\_\_\_\_\_}{2}$$

Ahora simplifica la fórmula que escribiste y escribe el resultado:

$$Área = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_ \times \_\_\_\_\_\_\_\_}{2} = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

La fórmula final para calcular el área del círculo después de simplificar quedará como:



$$Área = \frac{perímetro \times apotema}{2} \qquad Área = \frac{perímetro \times apotema}{2}$$

$$= \frac{2 \times \pi \times radio \times radio}{2} = \pi \times radio^2$$

$$Área = \pi \times r^2$$

FIGURA 23.4 Polígono regular y círculo.

Vuelve a leer el Reto y Un nuevo reto, con lo estudiado anteriormente, no deberías tener problema para solucionarlos.

Comenten en grupo y disipen sus dudas con ayuda del profesor o profesora.

¡A practicar!

1. Observen la figura, calculen y contesten:

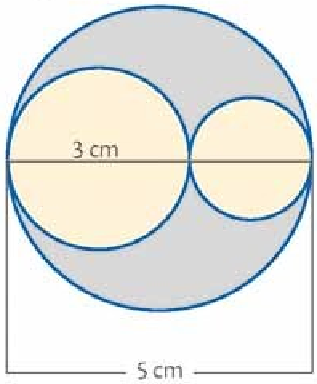


FIGURA 23.5 Figura formada con círculos.

a) ¿Cuánto mide el área del círculo grande?

____

b) ¿Cuánto mide el área del círculo mediano?

____

c) ¿Cuánto mide el área del círculo pequeño?

____

d) ¿Cuánto mide el área gris? ________

2. Laura y su mamá necesitan hacer un mantel para una mesa circular que tiene un radio de 70 cm. Quieren que el mantel cuelgue 20 cm de la orilla de la mesa.

a) ¿Cuántos metros de cinta necesitan?

b) ¿De cuánto es la diferencia entre el área de la mesa y la del mantel?

3. Un barril avanza 2.17 m con cada vuelta. ¿Cuánto mide el área de la tapa? (Consideren el valor de 3.14 para π.)

Para terminar

1. En parejas contesten las siguientes preguntas. Repasen la lección para corregir o comenten grupalmente las preguntas y respuestas que requieran revisar.
   a) ¿Cómo calculan el perímetro de un círculo? ______________________
   b) ¿Cómo calculan el área de un círculo? ______________________
   c) ¿Cómo calculan el perímetro y el área de un círculo si sólo tienen la medida del radio? ______________________
   d) ¿Cómo calculan el perímetro y el área de un círculo si sólo tienen la medida del diámetro? ______________________
   e) ¿Cómo usarían la fórmula para el cálculo del área de polígonos regulares en el cálculo del área del círculo? ______________________

Portafolio de evidencias

Elige para tu portafolio de evidencias, la solución al Reto y algún trabajo sobre el cálculo del área del círculo.

En tu cuaderno escribe brevemente qué conocimientos adquiriste con la lección respecto del cálculo del área del círculo y qué dudas tienes. Compara con lo escrito por otros estudiantes y en caso necesario consulten con su maestro o maestra.

TIC

1. En equipos, hagan estas actividades en una computadora.
   a) Construyan en una hoja electrónica de cálculo una tabla como la que se muestra, en la que se pueda calcular el diámetro, la longitud de la circunferencia y el área del círculo, dado el radio, o que calcule todos los elementos de la tabla, dado uno de ellos.

=A2*A2*3.141592

	A	B	C	D
1	Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia	Área del círculo
2	4	8	25,1327408	50,2654816
3				
4				
5	Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia	Área del círculo
6	4	8	25,1327408	50,2654816
7				
8				
9	Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia	Área del círculo
10	4	8	25,1327408	50,2654816
11				
12				
13	Radio	Diámetro	Longitud de la circunferencia	Área del círculo
14	4	8	25,1327408	50,2654816

=A2*2

=B2*3.1415926

=B6/2

=C10/3.1415926

=Raiz(D14/3.1415926)

FIGURA 23.6 Hoja electrónica de cálculo.

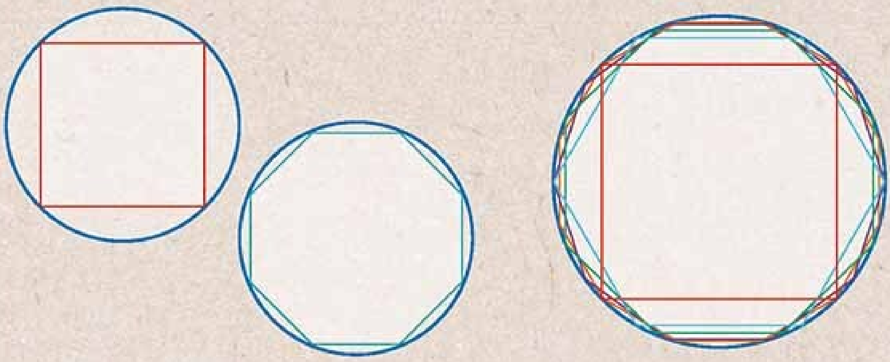
b) Comenten al interior del equipo y con otros equipos, el significado de cada una de las fórmulas escritas en la hoja de cálculo.

c) Cuando la hoja electrónica de cálculo tenga escritas todas las fórmulas necesarias, bastará que escriban el dato conocido en la celda amarilla que corresponda para que automáticamente observen los valores de las celdas azules. Todas las celdas en azul deben tener la fórmula correspondiente.

Para leer

El número π (Pi)

Uno de los grandes enigmas de la humanidad ha sido la historia del número π. Uno de los textos matemáticos más antiguos, el Papiro de Rhind (aproximadamente del año 1700 a. de n.e.), nos muestra al escriba Ahmés cotejando la evaluación del área de un círculo inscrito en un cuadrado.



Cuadrado y octágono inscritos en un círculo.

Cuantos más lados tiene un polígono, más se parece a una circunferencia.

FIGURA 23.7 Polígonos de diferentes lados inscritos en un círculo.

En la Grecia Antigua empezó a considerarse uno de los grandes retos resolver la relación entre el diámetro y el perímetro de un círculo.

Antiphon, un contemporáneo de Sócrates, inscribió un cuadrado en el círculo y luego un octágono. Imagina duplicar el número de lados hasta el momento en que el polígono resultante coincida prácticamente con el círculo, como se muestra en la figura.

Evaluación

del Trimestre 2

Autoevaluación

Aprendizajes esperados	Sin dificultad	Con dificultad	Necesito ayuda
Verifico algebraicamente la equivalencia de expresiones de primer grado, formuladas a partir de sucesiones.			
Formulo expresiones de primer grado para representar propiedades (perímetros y áreas) de figuras geométricas y verifico equivalencia de expresiones, tanto algebraica como geométricamente (análisis de las figuras).			
Deduzco y uso las relaciones entre los ángulos de polígonos en la construcción de polígonos regulares.			
Resuelvo problemas que implican conversiones en múltiplos y submúltiplos del metro, litro, kilogramo y de unidades del sistema inglés (yarda, pulgada, galón, onza y libra).			
Calculo el perímetro y área de polígonos regulares y del círculo a partir de diferentes datos.			

Evaluación

De manera individual, resuelve los siguientes problemas:

1. La figura 1 es un triángulo isósceles que se cortó con una línea horizontal que pasa por el punto medio de su altura. En la figura 2, las tres partes en que queda dividido el triángulo se reacomodaron para formar un rectángulo. Escribe las expresiones algebraicas que representan las dimensiones del rectángulo y dos expresiones algebraicas equivalentes que representen su área.

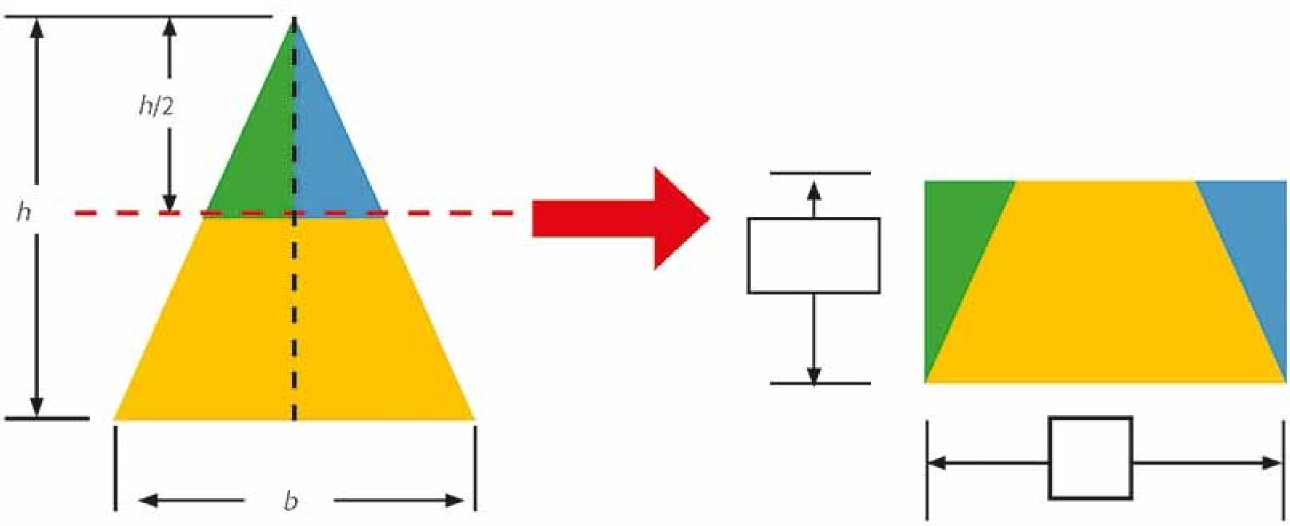
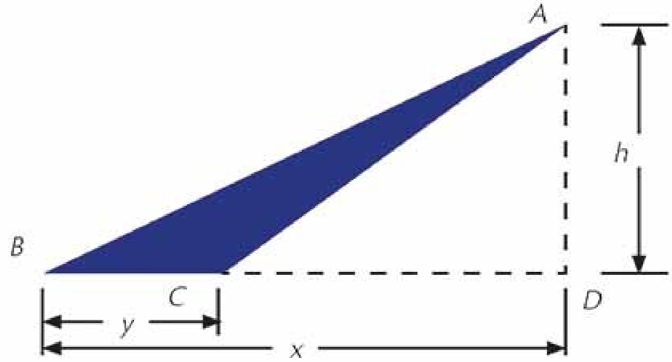


Figura 1 Figura 2

2. El triángulo ABC se puede calcular restando el área de dos triángulos rectángulos: ABD y ACD.



Escribe dos expresiones algebraicas equivalentes que permitan calcular el área del triángulo ABC:

Expresión 1: ________________________ Expresión 2: ________________________

3. Escribe dentro del paréntesis la letra que corresponda con la descripción del lado izquierdo.

a) Desde un vértice se pueden trazar 3 diagonales, el número total de diagonales es de 9.

b) Desde un vértice se pueden trazar 6 diagonales, el número total de diagonales es de 27.

c) Desde un vértice se pueden trazar 4 diagonales, el número total de diagonales es de 14.

Cuadrado	( )
Heptágono (7 lados)	( )
Hexágono	( )
Eneágono (9 lados)	( )

4. Escribe dentro del paréntesis la letra que corresponda.

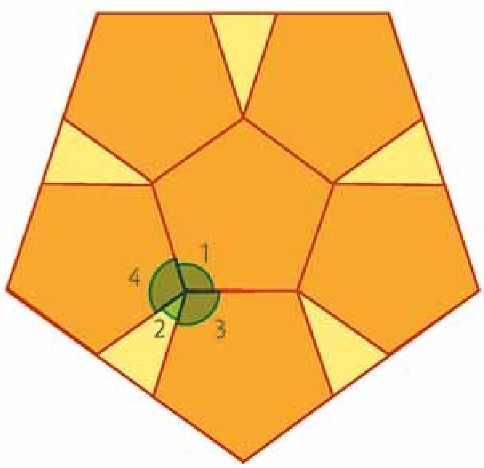
a) Sus ángulos centrales miden 72° y los ángulos interiores 108°

b) Sus ángulos centrales miden 60° y la suma de sus ángulos internos es de 720°

c) Sus ángulos centrales miden 120° y sus ángulos exteriores 120°

Triángulo equilátero	( )
Pentágono regular	( )
Hexágono regular	( )
Octágono regular	( )

5. Se quiere teselar un piso con los siguientes polígonos, escribe:



a) ¿Cuánto mide el ángulo 1?
b) ¿Cuánto mide el ángulo 2?
c) ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos 1, 2, 3 y 4?

6. ¿Cuál de las siguientes medidas es equivalente a un litro?

a) 1 mm^3
b) 1 cm^3
c) 1 dm^3
d) 1 m^3

7. En un partido de beisbol profesional, golpearon a un jugador con una bola que viajaba a 96 millas por hora, ¿cuál era su velocidad en km/h?

a) Entre 10 y 49 km/h
b) Entre 50 y 100 km/h
c) Entre 101 y 120 km/h
d) Entre 121 y 160 km/h

8. Un campo de futbol americano tiene 120 yardas, ¿a cuántos metros equivale?

a) Entre 20 y 50 metros
b) Entre 51 y 100 metros
c) Entre 101 y 120 metros
d) Entre 121 y 150 metros

9. Un contenedor tiene una etiqueta indicando que su capacidad es de 2 642 galones, ¿a cuántos litros equivale?

a) Entre 100 y 1 500 litros
b) Entre 1 501 y 5 000 litros
c) Entre 5 001 y 7 500 litros
d) Entre 7 501 y 10 000 litros

10. El piso de un kiosco tiene forma de un hexágono regular con lámparas cada 2 m en su perímetro, de tal forma que cada lado tiene tres lámparas con una en cada vértice del hexágono. (Considera la apotema como 3.46 m).

- ¿Cuánto mide el perímetro del piso del kiosco?

a) 12 m
b) 24 m
c) 36 m
d) 48 m

- ¿Cuánto mide el área del piso del kiosco?

a) 6.92 m^2
b) 13.84 m^2
c) 20.76 m^2
d) 41.52 m^2

11. Un borrego está atado a un poste con una cuerda de 10 m. El borrego puede girar libremente alrededor del poste y a todo lo que da la longitud de la cuerda, sin que ésta se enrolle. Toma $\pi = 3.14$.

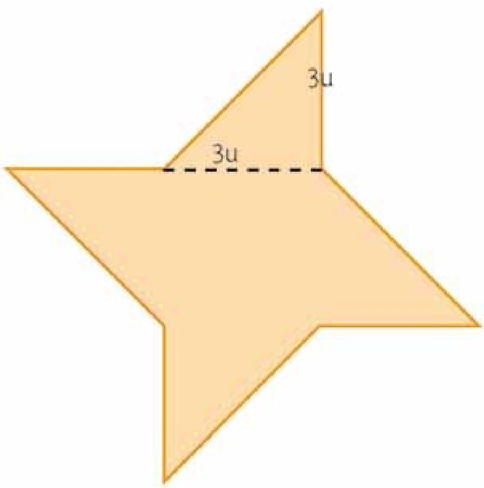
- ¿Cuál es el área en la que el borrego puede pastar?

a) 10 m^2
b) 31.40 m^2
c) 100 m^2
d) 314 m^2

- ¿Cuál es la distancia que recorre el borrego en cada vuelta completa con la cuerda extendida en su totalidad?

a) 10 m
b) 31.4 m
c) 20 m
d) 62.8 m

12. ¿Cuánto mide el área del siguiente polígono?



a) 24 u^2
b) 27 u^2
c) 28 u^2
d) 36 u^2

T3

Trimestre 3

1. ¿Cómo puedes saber cuánta agua le cabe al depósito de una pipa? Si conoces su capacidad, ¿puedes decir aproximadamente qué tan largo tiene que ser el camión?

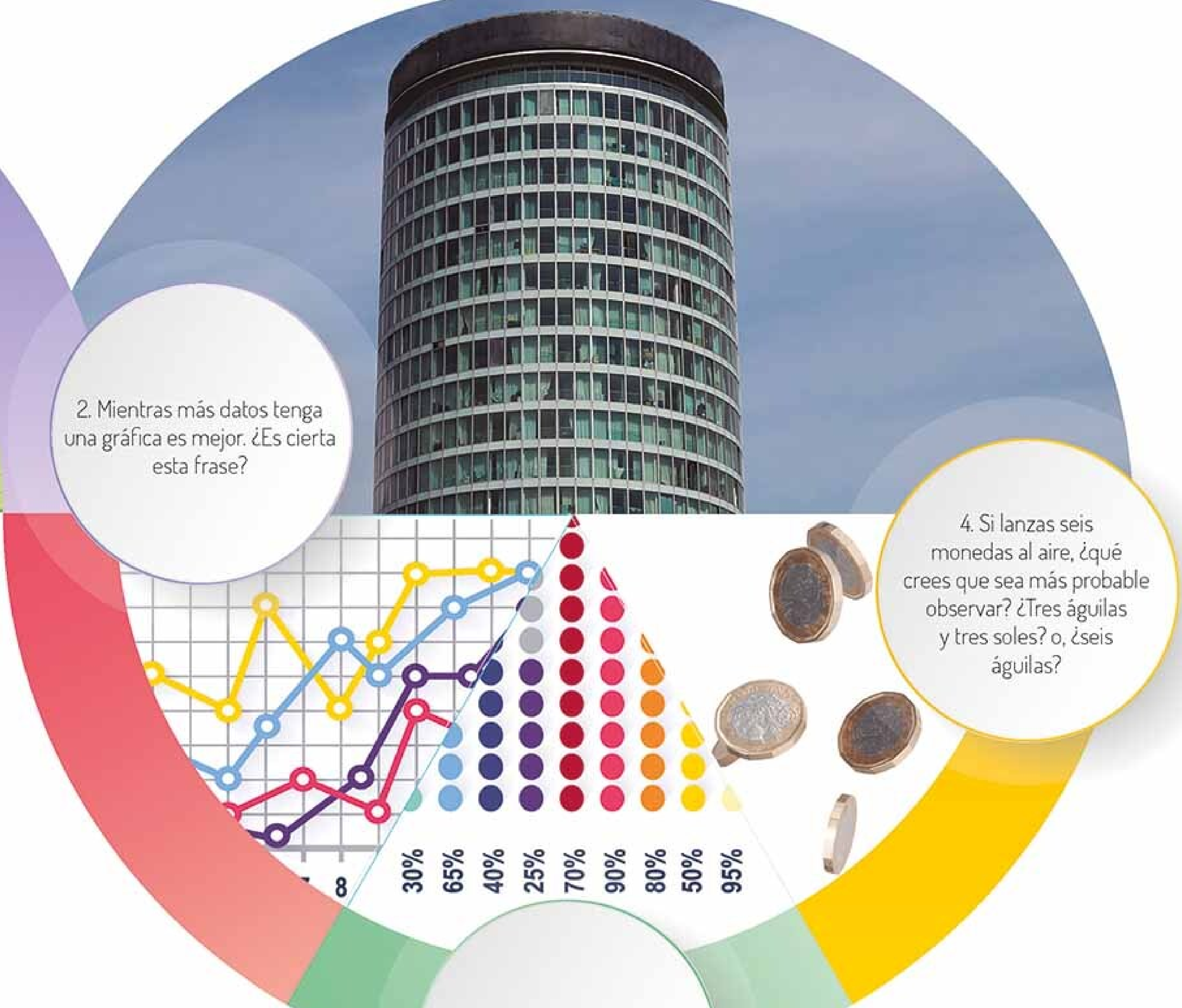
Propósitos del trimestre

Se espera que al término del trimestre puedas plantear y resolver problemas en distintos contextos:

- En los que sea necesario calcular el volumen de un cilindro, o de prismas cuyas bases sean diferentes polígonos regulares; también calcularás alguna de las dimensiones de prismas y cilindros, cuando se conocen el volumen y otras dimensiones.
- Con conjuntos de datos que requieran agruparse para su organización y manejo adecuado; elaborar tablas de frecuencias con datos agrupados, y representarlos gráficamente por medio de histogramas, polígonos de frecuencias y gráficas de línea; así como interpretar la información contenida en dichas gráficas.
- Que implican la descripción de conjuntos de datos por medio de sus medidas de tendencia central y de dispersión, seleccionando la más adecuada para cada situación; la desviación media se agrega en segundo grado a las ya estudiadas en grados anteriores.
- Donde se calcule la probabilidad teórica o clásica de un evento en un experimento aleatorio; comparaciones entre la probabilidad frecuencial y la teórica.

No te limites en las estrategias que utilices para la solución de los problemas, aun cuando no uses los métodos convencionales o sugeridos por el profesor, ya que el propósito principal es valorar procesos y comprensión de los mismos, más que resultados. En el equipo que trabajes, comenten, intercambien ideas, hagan dibujos, utilicen la calculadora, la computadora e inclusive involucren a otras personas si es posible y necesario.

Es importante que, al término, expongan sus trabajos, comenten las dificultades encontradas y expliquen las estrategias que siguieron; escuchen con atención lo que mencionan los otros compañeros para que conozcan diferentes caminos hacia la solución de un problema y recuerden que el trabajo colaborativo puede ayudar para tal fin, además de facilitar la detección y la corrección de errores. Lo anterior es pensar matemáticamente.



2. Mientras más datos tenga una gráfica es mejor. ¿Es cierta esta frase?

4. Si lanzas seis monedas al aire, ¿qué crees que sea más probable observar? ¿Tres águilas y tres soles? o, ¿seis águilas?

3. ¿Para qué sirve hacer encuestas?

Prisma**s** y cilindros

Aprendizaje esperado: Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

Contenido: Construcción de los prismas y el cilindro

Para arrancar

p

1. Reúnete con un compañero y escriban el nombre de cada figura geométrica.

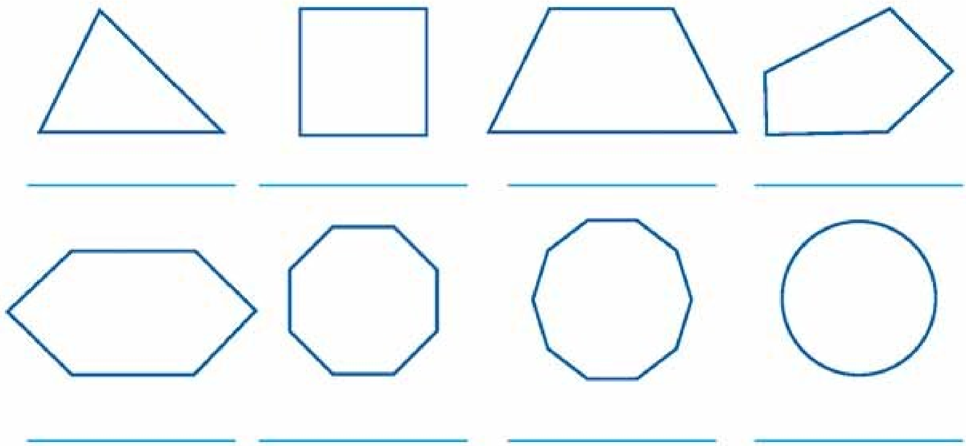


FIGURA 24.1 Polígonos.

Reto

e

1. Integren a otro compañero en su equipo para resolver el siguiente reto.

Caro, Cori e Isaac quieren hacer dulceros de cartón para llenarlos con dulces de amaranto y regalarlos en ocasiones especiales, en la **FIGURA 24.1** pueden observar las formas y los diseños que han pensado elaborar.

FIGURA 24.2 Dulceros de cartón.

El problema es: ¿cómo elaborarlos?

a) Expliquen cómo elaborar cada una de las formas mostradas.

b) Comenten con otros equipos sus estrategias y diseños elaborados. Expongan en el grupo sus dudas.

Pistas

1. Con los mismos equipos del reto hagan la siguiente actividad.
   a) Consigan cajas que tengan bases triangulares, rectangulares o cuadradas, pentagonales, hexagonales, de círculo, etcétera; ábranlas y dibujen las plantillas resultantes como se observa en la FIGURA 24.3.

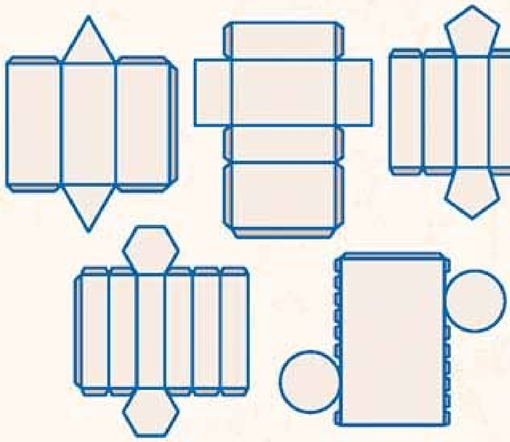


FIGURA 24.3 Plantillas de diferentes cajas.

   b) Clasifiquen sus plantillas por el número de caras que lo forman y dejen al final la que tiene caras circulares.
   c) Dibujen en su cuaderno las plantillas empezando por la triangular.
      - ¿Cuántas caras rectangulares tiene? ¿Por qué?
      - ¿Cómo son las dimensiones de las caras rectangulares? ¿Por qué?
      - ¿Por qué al menos un lado de las caras rectangulares debe ser del mismo tamaño que uno de los lados de la base?
      - Midan el perímetro de una de las bases triangulares.
      - ¿Cuánto suman los tres lados cortos de las caras rectangulares? ¿Por qué?
   d) Continúen con la plantilla que tenga bases rectangulares.
      - ¿Cuántas caras rectangulares tiene, sin incluir las dos bases? ¿Por qué?
      - ¿Cómo son las dimensiones de las caras rectangulares? ¿Por qué?
      - ¿Por qué las caras rectangulares son de dos tamaños diferentes?
      - Midan el perímetro de una de las bases rectangulares.
      - ¿Cuánto suman los cuatro lados cortos de las caras rectangulares? ¿Por qué?
   e) Continúen con la plantilla que tenga bases pentagonales.
      - ¿Cuántas caras rectangulares tiene?
      - ¿Por qué?
      - ¿Cómo son las dimensiones de las caras rectangulares?
      - ¿Por qué?
      - Midan el perímetro de una de las bases pentagonales.
      - ¿Cuánto suman los cinco lados cortos de las caras rectangulares? ¿Por qué?
   f) Hagan lo mismo con la plantilla de bases hexagonales.
   g) Comparen con otros equipos sus respuestas e identifiquen semejanzas y diferencias

Para analizar

Un nuevo reto

1. En equipos hagan lo que se indica.
   a) Analicen la plantilla del cilindro de la FIGURA 24.4 y contesten.

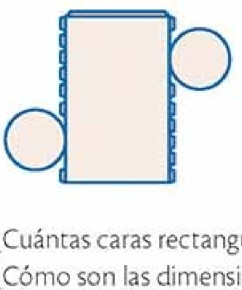


FIGURA 24.4 Plantilla de un cilindro.

      - ¿Cuántas caras rectangulares tiene? ¿Por qué?
      - ¿Cómo son las dimensiones de la cara rectangular? ¿Por qué?

- Calculen el perímetro de una de las bases circulares.
- ¿Cuánto mide el lado mayor de la cara rectangular? ¿Por qué?

Glosario

Prisma. Cuerpo geométrico con dos caras opuestas congruentes.

b) Las siguientes, son características de los **prismas** rectos, con ellas, analicen las plantillas y pongan ✓ a las que correspondan a un prisma.
- Tienen dos bases opuestas iguales
- Las bases están colocadas en los lados opuestos de las caras rectangulares
- Las caras que unen a las bases opuestas tienen forma de rectángulo
- Tienen tantas caras laterales rectangulares como lados tienen las bases
- El perímetro de las bases es equivalente a la suma de los lados de las caras rectangulares en las que están apoyadas.

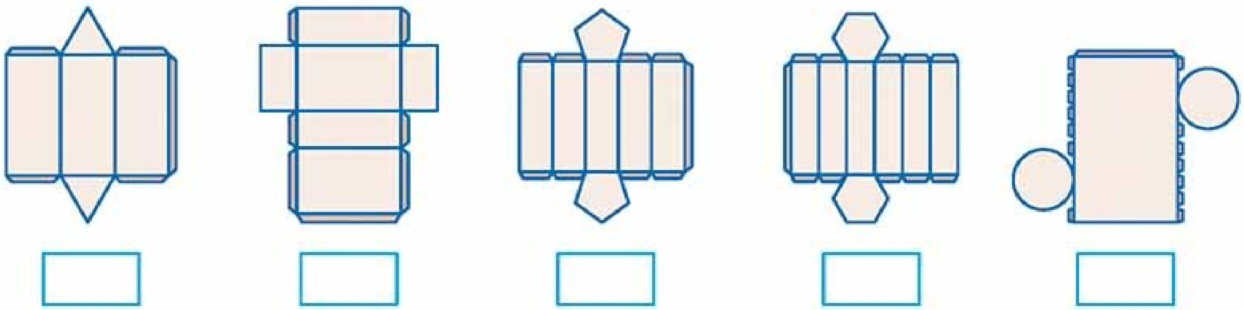


FIGURA 24.5 Plantillas de cuerpos geométricos.

- ¿El cilindro puede ser considerado un prisma circular? ¿Por qué?

c) Comparen sus respuestas con las de otros equipos y en caso de dudas expóngalas en el grupo.

Formalización

1. Reúnete con un compañero, observen las diferentes vistas del prisma y del cilindro y contesten las preguntas.

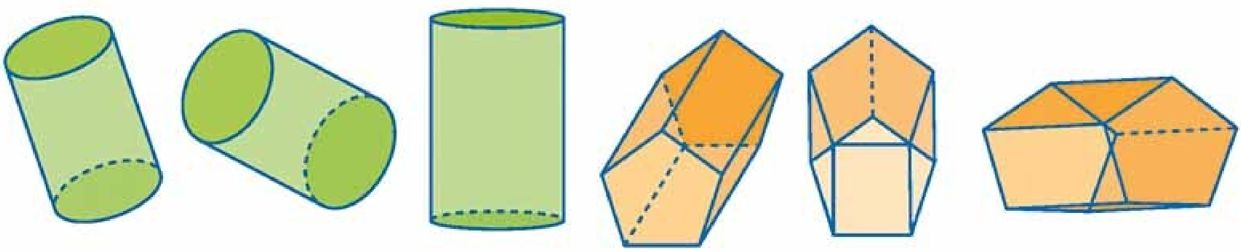


FIGURA 24.6 Diferentes vistas de un cilindro y de un prisma pentagonal.

a) ¿Cómo son las caras opuestas?
b) ¿Qué forma tienen las caras laterales?
c) ¿Cuántos lados tiene la base?
d) ¿Cuántas caras laterales tiene el prisma?
e) ¿Cuánto mide el perímetro de una base del prisma?
f) ¿Cuánto sumaran las medidas de los anchos de las caras laterales?
g) ¿Cuánto miden de ancho cada una de las caras laterales en el prisma? ¿Por qué?

h) En el cilindro, ¿qué relación existe entre el perímetro de la base y la medida de la cara curva donde se junta con la base?

Una vez que se traza una de las bases de un prisma o de un cilindro, algunas medidas quedan definidas y otras puede variar.

2. Observen las plantillas y completen las medidas.

a)

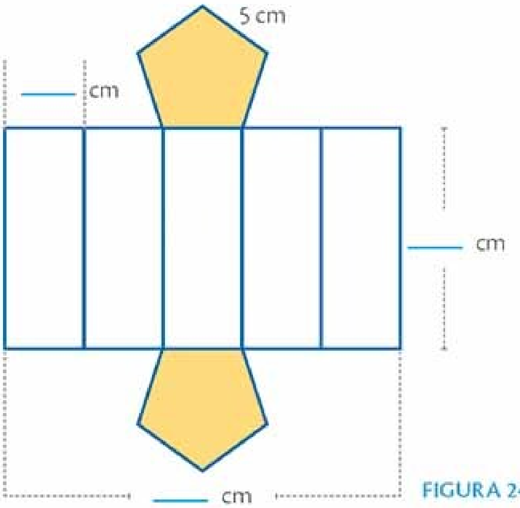


FIGURA 24.7 Plantilla de un prisma pentagonal.

- ¿En qué otros lugares pueden estar las bases amarillas del prisma?
- ¿Tienen que estar necesariamente opuestas a la misma altura?, ¿por qué?

b)

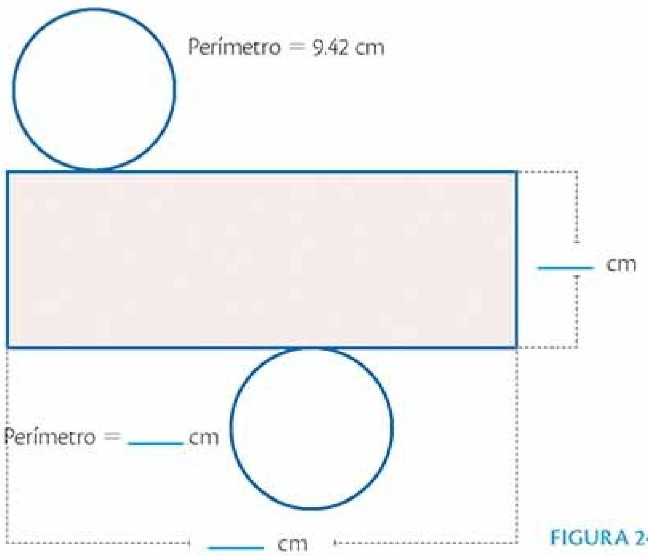


FIGURA 24.8 Plantilla de un cilindro.

- Comenten y comparen con otras parejas y en el grupo sus respuestas, y en caso de dudas consulten con su profesor o profesora.

Vuelve a leer el Reto y Un nuevo reto; con lo estudiado anteriormente, no deberías tener problema para solucionarlos.

¡A practicar!

1. En equipos elaboren diferentes prismas y cilindros y realicen una maqueta. Muestren al grupo su trabajo.

Para terminar

1. En parejas contesten las siguientes preguntas. Si es necesario repasen la lección o comenten grupalmente las preguntas y respuestas en las que tuvieron dudas.
   a) ¿Cómo son las bases opuestas en un prisma?
   b) ¿Cómo son las bases opuestas en un cilindro?
   c) ¿Qué forma tienen las caras laterales en un prisma?
   d) ¿Qué forma tiene en la plantilla la cara curva en un cilindro?
   e) En un prisma, ¿las bases opuestas pueden tener diferente forma? ¿Por qué?
   f) En un cilindro, ¿las bases opuestas pueden tener diferente tamaño? ¿Por qué?

Portafolio de evidencias

Elige para tu portafolio de evidencias algún trabajo sobre la elaboración de plantillas para un prisma y un cilindro.

2. En tu cuaderno escribe brevemente qué conocimientos adquiriste con la lección respecto del trazo de plantillas para formar prismas o el cilindro y qué dudas tienes. Compara con lo escrito por otros estudiantes y, en caso necesario, consulta con tu maestro o maestra.

TIC

1. Tracen en equipos alguna plantilla para la construcción de un prisma o un cilindro. Impriman su plantilla, recorten y armen el cuerpo geométrico.
   Tomemos como ejemplo la plantilla de un cilindro.
   a) En una hoja de trabajo, tracen una circunferencia de radio 2.

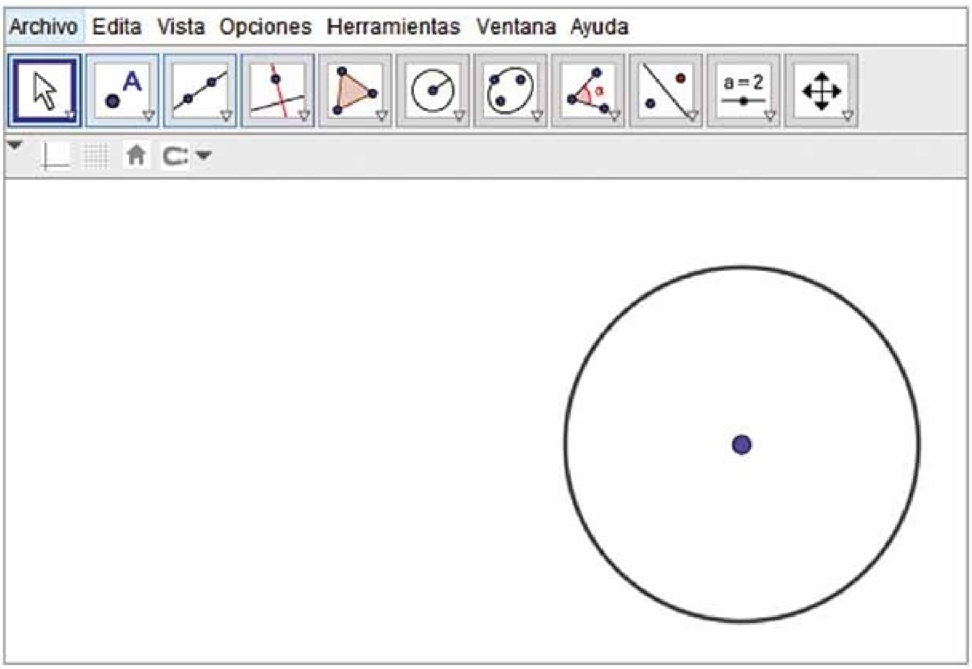


FIGURA 24.9 Base de un cilindro.

b) Elijan el comando distancia o longitud, señalen la circunferencia y den clic para que les indique el perímetro del círculo.

FIGURA 24.10 Comando distancia.

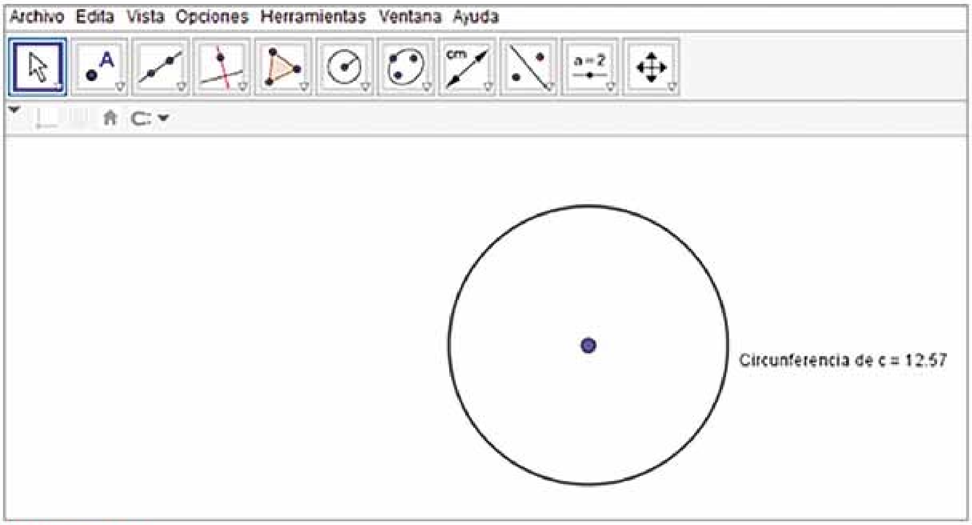


FIGURA 24.11 Perimetro de la circunferencia.

c) Tracen un segmento de longitud igual al perímetro del círculo y que toque un punto de éste.

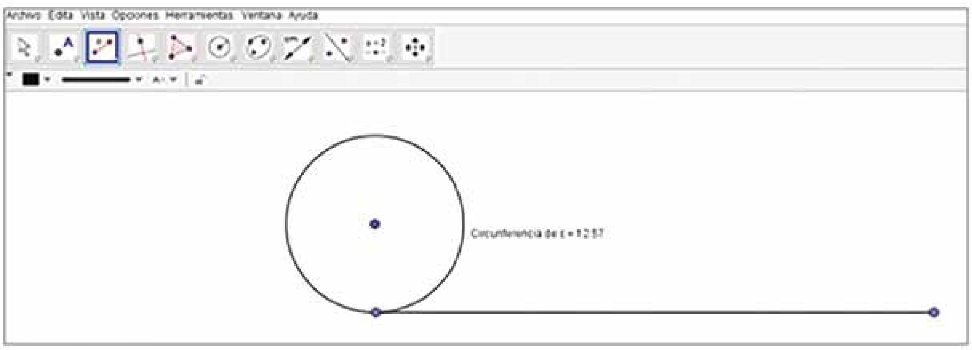


FIGURA 24.12 Segmento de longitud igual a la circunferencia.

d) Completen el rectángulo con la medida deseada de altura del cilindro.

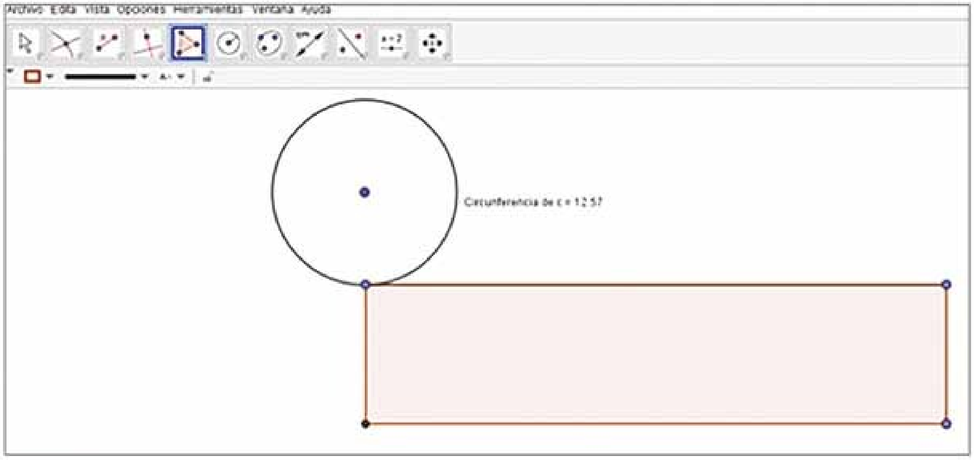


FIGURA 24.13 Parte del desarrollo plano de un cilindro.

e) Finalmente, traza otro círculo de radio 2 en la parte inferior del rectángulo. Oculta los trazos y puntos auxiliares antes de imprimir, y una vez impreso, no olvides dibujar las pestañas para pegarlo.

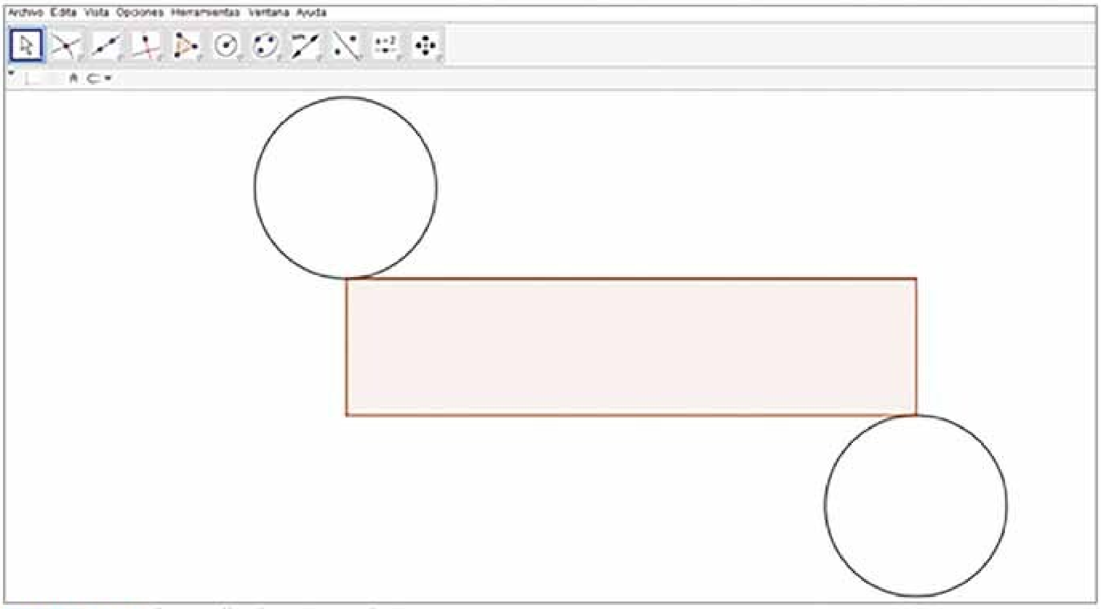


FIGURA 24.14 Desarrollo plano de un cilindro.

f) Compartan y comparen con otros equipos las diferentes plantillas trazadas.

Para leer

La duplicación del cubo. Un problema difícil

Cuenta una leyenda de la mitología griega que el dios Apolo estaba molesto con el pueblo de Delos porque consideraba que su templo, con forma de cubo, debía tener el doble de volumen del que tenía. Por esta razón los castigaba con una plaga; algunos habitantes, que querían terminar con la molestia del dios, fueron a la academia de Platón para ver cómo resolverían el problema. Ahí se dieron cuenta de que la solución de este problema es difícil.

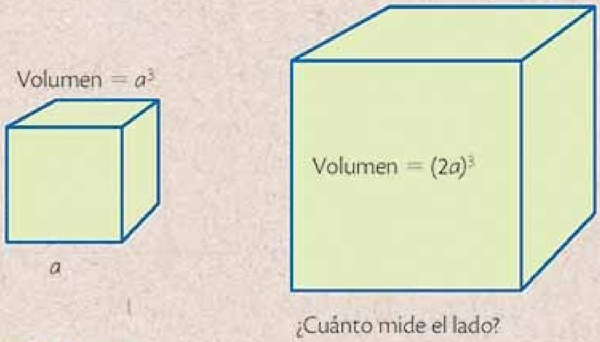


FIGURA 24.15 La duplicación del cubo.

¿Quieres resolver el problema?

Traza un cubo y a partir de este, otro que tenga el doble de volumen. ¿Cómo lo harías? Justifica tu respuesta.

Calcula lo que falta

Aprendizaje esperado: Calcula el volumen de prismas y cilindros rectos.

Contenido: Cálculo del volumen de prismas con base regular y el cilindro. Cálculo de alguna de sus dimensiones, dados algunos datos

Para arrancar

p

1. En parejas, observen las figuras y relacionen con líneas la figura y la forma para calcular su área.

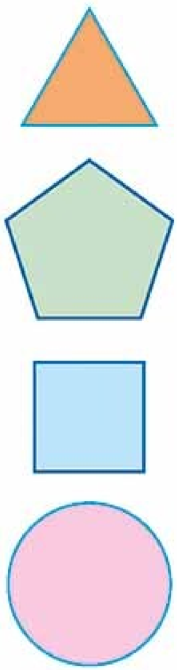


FIGURA 25.1 Figuras geométricas.

- Multiplicar π por la medida del diámetro
- Multiplicar π por la medida del radio y otra vez por la medida del radio
- Multiplicar la medida de la apotema por el perímetro de la figura y el resultado dividirlo entre dos
- Multiplicar la medida de uno de sus lados por el número de lados
- Multiplicar la medida de la base por la medida de la altura
- Multiplicar la medida de la base por la medida de la altura y el resultado dividirlo entre dos

Reto

e

1. Integren a otro compañero en su equipo y resuelvan el siguiente problema.

Caro, Cori e Isaac, consiguieron cubos de amaranto de 1 y 2 cm por lado y frutas cristalizadas equivalente a un cubo de 4cm por lado aproximadamente, si quieren que los dulceros tengan un volumen o capacidad para 10 dulces y al menos 2 de cada tipo, ¿qué dimensiones pueden tener los dulceros?

Consideren dejar algún espacio en los dulceros para evitar que los dulces se aplasten.

Expongan su trabajo ante el grupo y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

FIGURA 25.2 Cubos de amaranto y frutas cristalizadas.

Se vale

Empatía

Comenten en el equipo la conveniencia o no de dar algún obsequio en ocasiones especiales. Escuchen con atención a sus compañeros y respeten las diferentes opiniones.

Pistas

1. Con el mismo equipo formado en el Reto, lean lo siguiente y contesten las preguntas.
   - ¿Cuánto volumen representa la unión de una pieza de cada tipo de dulce?
   - ¿Cuánto volumen representa la unión de dos piezas de cada tipo de dulce?
   - ¿Con qué tipo de dulce completarías las 10 piezas? ¿Qué volumen representa?
   - ¿Cuánto volumen representan el total de los dulces que eligieron?
   - ¿Cómo calculan el volumen de cualquier prisma recto?
   - Consideren al cilindro como otro prisma, ¿Cómo calcularían su volumen?
   - ¿Qué tipo de base les gustaría para el dulcero? ¿Cómo calculan el área de la base?
   - ¿Cuánto proponen que tenga el dulcero de altura?

Representen diferentes posibilidades de volumen que den como resultado aproximado el volumen total de los 10 dulces.

Compartan con otras parejas sus resultados y, en caso de dudas, consulten con su profesor.

Para analizar

Un nuevo reto

1. Analiza junto con otro compañero la siguiente situación y realicen lo que se indica.

Gerardo guarda su ropa sucia en un cesto de forma cúbica que mide 60 cm por lado. Decide hacer otro con la misma capacidad, pero, esta vez con forma de prisma rectangular.

FIGURA 25.3 Cestos para ropa.

a) Estimen cuáles son las medidas del prisma rectangular para que cumpla con las condiciones del problema. · ¿Cuáles podrían ser las dimensiones del cesto en forma de prisma? ______

¿Las medidas son únicas? ______

b) Comparen las medidas de su prisma con las de sus compañeros y compartan su procedimiento para calcularlas.

- ¿Cuántas medidas diferentes resultaron? ______________________
- ¿Cuántos procedimientos diferentes surgieron? ______________________

c) Un prisma de 2 cm × 1 cm × 108 000 cm también cumple con el resultado. ¿Este prisma también entraría como posibilidad para el cesto de ropa? ¿Por qué?

____

____

Se vale

Colaboración

Generen ideas y proyectos de solución de Un nuevo reto, considerando las aportaciones de todos.

d) Escuchen las opiniones de otros compañeros y equipos y, en caso necesario, complementen comentando sus opiniones.

Formalización

Como aprendiste en el curso pasado, el volumen o capacidad de un prisma triangular o rectangular, se calcula multiplicando el área de la base por la altura del prisma, lo cual también aplica para otros prismas rectos con bases poligonales.

$$V = A_b \cdot (h)$$

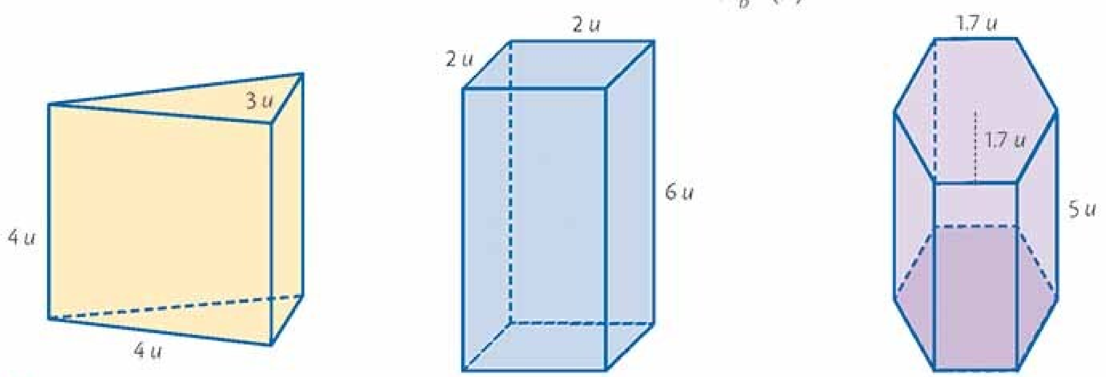


FIGURA 25.4 Prisma triangular, cuadrangular y hexagonal.

Área de la base $= \frac{3u \times 4u}{2} = 6u^2$	Área de la base $= 2u \times 2u = 4u^2$	Área de la base $= \frac{P \times a}{2} = \frac{12u \times 1.7u}{2} = 10.2\ u^2$
Altura del prisma $= 4u$ $V = 6u^2 \times 4u = 24u^3$	Altura del prisma $= 6u$ $V = 4u^2 \times 6u = 24u^3$	Altura del prisma $= 5u$ $V = 10.2u^2 \times 5u = 51u^3$

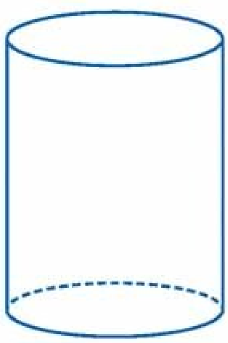


FIGURA 25.5 Volumen de un cilindro.

En el caso del cilindro, el cálculo de su volumen o de su capacidad es de la misma forma, esto es, su volumen será igual al producto del área de la base por la altura del cilindro.

$$V = A_b \cdot (h)$$

En el cilindro las bases son circulares, escribe a continuación cómo calculas el área de su base.

$A_b =$ __________

Entonces para calcular su volumen se usa la siguiente fórmula.

$$V = \pi r^2 \cdot (h)$$

En ocasiones se conoce el valor del volumen o la capacidad de los prismas o los cilindros y la información que se necesita es otro de los datos; observa los siguientes ejemplos:

2. Se quiere construir un cubo que tenga 343 cm^3 de capacidad. ¿Cuánto debe medir una de sus aristas?

Si se nombra con la letra *a* una de sus aristas, el volumen se representa como:

$V = A_b \cdot (h)$, pero en este caso el cálculo del área de la base es
$a \cdot a = A_b$ y la altura corresponde a la arista *a* por lo que su volumen se puede representar como

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3 = 343 \text{ cm}^3$$

a) Subraya el rango en el que debe estar la medida de la arista para que cumpla con el problema.
- Entre 1 y 5
- Entre 6 y 9
- Entre 10 y 15
- 16 o más

b) Calcula la medida y ve qué tan lejos o cerca estuviste del rango que elegiste.

En el siguiente ejemplo, lo que se pide calcular es la altura de un prisma.

3. Se quiere cavar una fosa con forma de prisma cuadrangular, de tal modo que tenga de anchura 25 cm y de profundidad 25 cm, pero capacidad de un metro cúbico ($1 \text{ m}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$).

¿De qué largo debe ser la fosa?

Si se representa con la letra *h* lo largo de la fosa, su volumen será:

$$V = A_b \cdot (h) = 25 \times 25 \times h = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

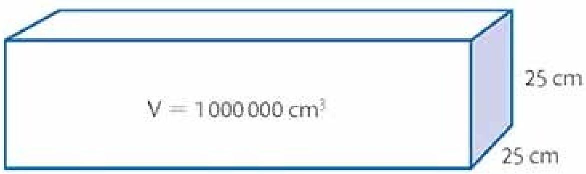


FIGURA 25.6 Fosa en forma de prisma cuadrangular.

a) Subraya el rango en el que debe estar la medida de la *h* para que cumpla con el problema.
- Entre 1 300 y 2 800
- Entre 2 801 y 4 500
- Entre 4 501 y 6 000
- 6 001 o más

b) Calcula la medida y ve qué tan lejos o cerca estuviste del rango que elegiste.
- ¿Qué estrategia usaste para encontrar el número buscado?

Se vale

Colaboración

Comparen sus respuestas con las de otros equipos y, en caso necesario, ayuden a sus compañeros para que todos comprendan que el problema se reduce a despejar la variable buscada.

c) Sustituye el valor de *h* y comprueba que su resultado es correcto.

d) Expón tu trabajo ante el grupo y, en caso de dudas, consulten con su profesor o profesora..

Vuelve a leer el Reto y Un nuevo reto, compara tu respuesta con lo estudiado anteriormente.

¡A practicar!

Glosario

Poliedro. Cuerpo geométrico limitado por caras planas.

1. A Gerardo le dejaron de tarea calcular el volumen de un cubo y un prisma rectangular. El profesor les dijo que el volumen debe ser igual en ambos **poliedros**, pero que anotaran las medidas en el prisma.

   a) ¿Cuánto deben medir el largo, el ancho y la altura del prisma rectangular de la figura?

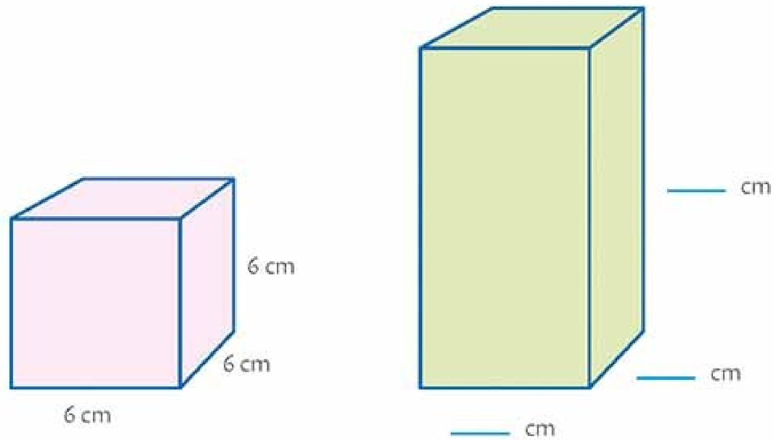


FIGURA 25.7 Prismas.

2. Si 1 cm^3 de plata tiene una masa de 10.5 g, ¿cuánta masa tendrá el siguiente trozo?

FIGURA 25.8 Trozo de plata en forma cilindrica.

3. Si se echan 4 500 cm³ de agua en la pecera, ¿hasta dónde llegará el agua? ¿Cómo lo explicas?

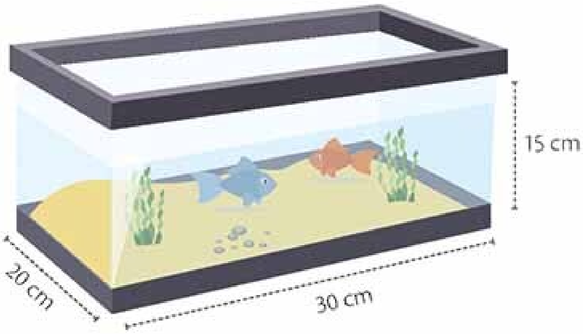


FIGURA 25.9 Pecera.

Para terminar

1. En parejas contesten las siguientes preguntas. Repasen la lección o comenten grupalmente las preguntas y respuestas en las que tuvieron dudas.
   a) ¿Cómo se calcula el volumen de cualquier prisma recto?
   b) ¿Cómo se calcula el volumen de un cilindro?
   c) ¿Cómo se calcula la altura de cualquier prisma recto si se conoce su volumen y el área de la base?
   d) ¿Cómo se calcula en cualquier prisma recto el área de la base si se conoce su volumen y la altura del prisma?
   e) ¿Cómo se calcula la altura de cualquier cilindro si se conoce su volumen y el área de la base?

2. Escribe brevemente en tu cuaderno qué conocimientos adquiriste con la lección respecto del cálculo de las diferentes variables que intervienen en el cálculo del volumen de prismas y del cilindro y qué dudas tienes aún.
   a) Compara con lo escrito por otros compañeros y en caso necesario consulten con su maestro o maestra.

Portafolio de evidencias

Incluye para tu portafolio de evidencias la solución al Reto y algún trabajo sobre el cálculo de alguna variable sobre el volumen de prismas rectos y cilindros.

TIC

1. En equipos de tres compañeros, elaboren una hoja electrónica de cálculo, como la de la FIGURA 25.9, para calcular volúmenes de prismas o cilindros o alguna de sus variables.

B16

	A	B	C
1		Prisma	
2	Área de la base	Altura del prisma	Volumen
3			=A3*B3
4	=C4/B4		
5		=C5/A5	
6			
7		Cilindro	
8	Área de la base	Altura del cilindro	Volumen
9			=A9*B9
10	=C10/B10		
11		=C11/A11	

FIGURA 25.10 Hoja de cálculo para calcular volumen de prismas y cilindros.

a) Comenten al interior del equipo y con otros equipos el significado de las fórmulas escritas en la hoja de cálculo.
   - En las celdas amarillas hay que introducir los datos conocidos.
   - En las celdas azules, debes introducir las fórmulas que calcularán automáticamente el dato solicitado.
   - Recuerda que las fórmulas en las celdas azules deben iniciar con el signo, "=" y que las operaciones están definidas de la siguiente manera: para la suma, +; para la resta, −; para la multiplicación, *; y para la división, /.

b) Comparen sus hojas de cálculo con las de otros equipos y, en caso necesario, corrijan o aumenten lo que les haga falta.

c) Consulten la siguiente página de internet. Entren al apartado de ejercicios y resuelvan algunos relacionados con prismas o con cilindros.

http://proyectodescartes.org/EDAD/materiales_didacticos/EDAD_2eso_volumen_cuerpos_geometricos-JS/index.htm (Fecha de consulta, 10 de abril de 2018).

Para leer

Los Silos

A lo largo de la historia, conos y cilindros han proporcionado a las civilizaciones la solución para uno de sus problemas fundamentales: ¿dónde almacenar los granos de sus cosechas?

A finales del XIX, Franklin Hiram King (1848–1911), un científico agrícola, nacido en una granja de Wisconsin, dedicó su vida al estudio de los suelos y la forma de aprovecharlos y hacerlos más fértiles (en Estados Unidos de América se le considera el padre de la física de suelos).

Como resultado de su interés por esta rama del conocimiento, diseñó el silo cilíndrico que hasta ahora, con algunas modificaciones, se usa.

Uno de los problemas que los silos con esta forma resolvieron fue el de evitar que se formara moho, pues como los cilindros no tienen esquinas, no ofrecen recovecos donde esta plaga de los granos pueda generarse y mantenerse.

FIGURA 25.11 Silos cilíndricos.

¿Quién salta más?

Aprendizaje esperado: Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

Contenido: Elabora y lee tablas de frecuencias con datos agrupados, así como histogramas

Para arrancar

1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica.

a) Describan en su cuaderno la información de la gráfica siguiente.

Alumnos por grupo de segundo grado
Escuela Secundaria "Miguel de Cervantes" 2018-2019

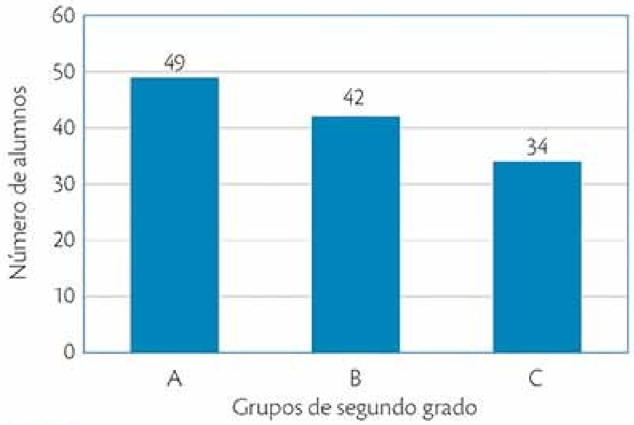


FIGURA 26.1 Gráfica del número de alumnos por grupo de segundo grado en la Escuela Secundaria Miguel de Cervantes.

b) Completen la tabla de frecuencias que contenga los datos de la gráfica.

Alumnos por grupo de segundo grado
Escuela Secundaria Miguel de Cervantes 2018-2019

Grupo	Número de alumnos

TABLA 26.1 Número de alumnos por grupo de segundo grado en la Escuela Secundaria Miguel de Cervantes.

c) Comparen y comenten en el grupo lo que obtuvieron los equipos.

Relaciónalo

El registro y lectura de datos en tablas y graficas de barras se ha estudiado tanto en educación primaria como en primer grado. A continuación se recuperan algunos conceptos; si lo consideran necesario, pueden revisar sus materiales correspondientes.

La *frecuencia* (o *frecuencia absoluta*) de un dato es el número de veces que ese dato se observa en una lista o conjunto de datos.

La *frecuencia relativa* de un dato, es la parte del total de datos que representa la frecuencia de ese dato específico; es decir, el número de veces que este aparece respecto del total de datos. Se puede expresar como una fracción, como un numero decimal, o como un porcentaje.

La *Tabla de frecuencias* es una tabla con dos o tres columnas para organizar y presentar los datos de un conjunto; en la columna izquierda se presentan los datos específicos o intervalos de datos, y del lado derecho se muestran las respectivas frecuencias, que pueden ser absolutas, relativas o ambas.

LECCIÓN 26

Reto

1. Reúnete con dos compañeros, lean la siguiente información y hagan lo que se pide.

Al inicio del año escolar, el profesor de educación física desea saber cuál es la condición física de los alumnos del plantel. Para ello, los alumnos realizan diferentes pruebas; el profesor registró los siguientes datos de los alumnos varones de segundo grado.

Prueba de salto de altura (cm) Escuela José Emilio Pacheco
Alumnos de segundo grado

92, 77, 84, 91, 102, 72, 95, 88, 94, 90, 83, 86, 88, 85, 96, 74, 93, 76, 89, 101, 81, 90, 97, 78, 87, 94, 99, 104, 77, 88, 92, 93, 86, 82, 99, 91, 87, 102, 98, 100, 94, 98

a) Respondan las siguientes preguntas.

- ¿Cuáles datos se observan dos o más veces?

  ____

- Si construye una tabla de frecuencias con los datos que recogió el profesor, ¿cuántos renglones tendrá esa tabla? ________________
- Si ubican los datos sobre el eje horizontal de una gráfica de barras, ¿cuántos datos diferentes hay que colocar en ese eje? ¿Cuáles serían las frecuencias de esos datos?

  ____

  ____

b) Para organizar el conjunto de datos sobre saltos de altura, elaboren una tabla de frecuencias que permita responder las preguntas del profesor de educación física; por ejemplo, un equipo podría llenar una tabla como la 26.2, indicando intervalos de altura.

Prueba de saltos de altura - Escuela José Emilio Pacheco
Alumnos Segundo Grado

Saltos de altura (cm)	Frecuencia
70-75	
76-81	
82-87	
88-93	
94-99	
100-105	
Total	

TABLA 26.2 Tabla de frecuencia de la altura alcanzada en la prueba de saltos.

Glosario

Intervalo. Conjunto de todos los números comprendidos entre dos números *a* y *b*, donde $a<b$; *a* y *b* son los extremos, y pueden estar incluidos o no en el intervalo. En una recta numérica, un intervalo representa un segmento que puede contener o no a sus extremos.

c) Consideren que no hay un resultado único, cada equipo puede agrupar los datos con diferentes intervalos. Comparen los diferentes procedimientos y resultados.

d) Comparen esta tabla de frecuencias con las que elaboraron al inicio de la lección y en el punto 1, y comenten con su profesor las similitudes y diferencias que encontraron.

e

2. En los mismos equipos del Reto, haz lo que se indica.

a) Lean la información y respondan las preguntas.

El profesor tiene varias preguntas que espera poder contestar a partir de estos datos que ha recabado. Como son muchos datos, no le interesa expresar sus respuestas con un solo valor, sino agrupando los saltos de altura por **intervalos**.

- ¿Qué tanta variación hay en los saltos?
- ¿Cuál es el intervalo con los saltos más altos y en cual están los más bajos?
- ¿Cuál es el intervalo de saltos que se ubica en el centro, aproximadamente equidistante de los extremos anteriores?
- ¿En qué intervalo o intervalos se observaron más saltos?
- ¿Coincide con el anterior?
- ¿Cómo se distribuyen los datos respecto de los intervalos anteriores (el central, el más frecuente, los extremos)?
- ¿Hay más en la parte alta o en la parte inferior del conjunto de datos?

b) Para organizar el conjunto de datos sobre saltos de altura, elaboren una tabla de frecuencias que permita responder las preguntas del profesor de educación física.

c) No hay un resultado único. Comparen los diferentes procedimientos y resultados, y comenten con su docente.

Pistas

1. Lean las siguientes sugerencias, pueden orientarlos para resolver el Reto.

- No es recomendable utilizar muchos grupos o intervalos de datos, pero tampoco es útil definir sólo dos o tres.
- Como los datos no incluyen fracciones de centímetros, se pueden usar sólo números enteros para formar los intervalos.
- Una vez determinados los intervalos de saltos, se pueden contar los datos que caen dentro o sobre los extremos de cada uno de ellos.

Para analizar

Un nuevo reto

1. Reúnete con tres compañeros, lean la siguiente información y hagan lo que se pide.

Cristóbal y Eugenia son biólogos, encabezan un grupo que estudia la población de osos negros en México. Recabaron los siguientes datos sobre la masa de los osos que encontraron en un estado del norte del país.

Masa en kilogramos de los osos negros observados
36.5, 156.9, 190, 158.7, 75.7, 100.3, 65.7, 151.4, 15.5, 63.8, 82.1, 47.9, 75.7, 93, 11.9, 54.7, 28.3, 57, 60.2, 41, 18.2, 100.3, 70.2, 52.9, 83, 68.4, 29.6, 144.1, 42.9, 69.9, 123.1, 92.1, 36, 119.5, 198.8, 21.9, 67.5, 203.4, 96.7, 27.4, 52, 13.2, 234.4, 63.8, 164.2, 93, 21, 39.2, 166.4, 107.6, 29.2, 34.7, 62.3, 92.1

Para conocer cómo es la población de osos negros en esa región, Eugenia y Cristóbal organizaron primero los datos en la TABLA 26.1.

e

Se vale

Cuidado de otros seres vivos y de la naturaleza

Estudios como el mencionado sobre los osos en México, contribuyen a la conservación de las especies. Informen en el grupo sobre actividades que tengan por objeto conocer y cuidar la naturaleza y otros seres vivos en su entorno.

Estado de Coahuila-2018

Masa (kg)	Frecuencia
10-39.9	14
40-69.9	15
70-99.9	10
100-129.9	5
130-159.9	4
160-189.9	2
190-219.9	3
220-249.9	1
TOTAL	54

TABLA 26.3 Masa en kilogramos de los osos negros observados.

a) Elaboren en sus cuadernos una gráfica con los datos de frecuencias agrupados en los intervalos mostrados en la **TABLA 26.3**.

- En el eje horizontal coloquen los diferentes intervalos de masa de los osos.
- En el eje vertical marquen las frecuencias.
- Sobre cada intervalo, dibujen un rectángulo, de manera que su altura sea la frecuencia de ese intervalo, y los lados verticales correspondan a los extremos o límites inferiores de los intervalos.
- Coloquen títulos a los ejes y a la gráfica.

b) Con base en la tabla de frecuencias elaborada y la gráfica trazada respondan las siguientes preguntas.

- ¿Qué tanto varía la masa de los osos negros encontrados? ______
- ¿En qué intervalo están los osos con mayor y menor masa? ______
- Ubiquen la parte media o centro del conjunto de datos, ¿cuál es el intervalo o intervalos en que se ubican ahí? ______
- ¿En qué intervalo o intervalos de masa se observaron más osos? ______
- ¿Coincide con los que están al centro? ______
- ¿Cómo se distribuyen los datos? ______
- ¿Se observaron más osos con mayor o menor masa? ______

c) Observando el conjunto de datos y los intervalos en la tabla de frecuencias, contesten.

- ¿Cuál es la masa más baja de un oso, y de cuántos kilogramos es el que tiene más masa? ______
- ¿Cuál es el extremo inferior del primer intervalo, y cuál el extremo superior del intervalo más alto? ______
- Identifiquen en qué intervalo se ubica cada uno de los siguientes datos: 67.5; 100.3; 190; 70.2. ______

- ¿Cada dato puede ubicarse en solo uno de los intervalos? Expliquen.

- ¿Por qué consideran que Eugenia y Cristóbal definieron los intervalos con un número entero como extremo inferior, y como extremo superior un número decimal que termina en 9 décimas? Expliquen.

d) Comparen los trabajos de los equipos, sus respuestas y resultados. Coméntenlos en el grupo y con su docente.

Formalización

1. En equipo lean la siguiente información, completen y contesten lo que se pide.

Las gráficas de barras y circulares, y sus correspondientes tablas de frecuencias, que se han estudiado en educación primaria y en primer grado de educación secundaria, se utilizan cuando hay que representar datos cualitativos y son pocas las categorías.

Resuelvan las situaciones del Reto y de Un nuevo reto utilizando el procedimiento de graficas de barras:

- ¿Qué tan extensas son las tablas, de cuántas filas resultaron?
- Si toman en cuenta cada salto (o la masa de cada oso), ¿qué tan larga es la tabla?
- Para trazar las gráficas de barras, ¿qué tan aglomerados o separados quedaron los diferentes valores de saltos de altura (o las masas de los osos negros)?
- ¿Qué tan diversas son las alturas de las barras?
  ¿Hay muchos datos iguales?
- ¿En la gráfica o la tabla se ve claramente donde hay mayor o menor cantidad de datos o cómo se distribuyen estos?

Comparen con las tablas y graficas donde agruparon los datos en intervalos:

- ¿En qué gráficas se ven más dispersos o separados entre sí los datos?
- ¿Cuáles consideran que son más breves y cuáles más extensas?
- ¿En cuáles tablas y gráficas se pueden distinguen mejor las diferencias entre frecuencias?

Por lo anterior, en situaciones donde los datos son **cuantitativos** y muy numerosos, estos se agrupan en intervalos en lugar de considerar cada una por separado. Para definir los intervalos de un conjunto de datos y elaborar la tabla de frecuencias:

Relaciónalo

Datos cualitativos: son categorías o clases que generalmente se expresan con palabras o imágenes: sexo, nacionalidad, nombres de los meses o días de la semana, marca de un producto o una condición (como haber asistido o no a un evento, o haber visto o no un video).

Datos cuantitativos: se expresan con números; pueden ser resultado de conteos (como cantidad de personas, cantidad de días o cantidad de computadoras) o de mediciones (peso, distancia, precio, tiempo transcurrido, por ejemplo).

Por ejemplo, si en una encuesta sobre redes sociales, un alumno menciona que está inscrito en una red específica, ese nombre será un dato cualitativo; si se pregunta en cuántas redes está inscrito el alumno, ese número es un dato cuantitativo.

- Lo primero es identificar los datos extremos del conjunto, es decir el menor y el mayor de ellos.
- Se eligen el extremo inferior del primer intervalo, y el extremo o límite superior del último intervalo; se divide este rango de datos en intervalos de igual amplitud.
- Para conjuntos con relativamente pocos datos (menos de 100), un número adecuado de intervalos es de entre 5 y 10; a estos intervalos se les conoce como intervalos de clase o clases.
- Se ubica cada dato en una clase, se cuentan y se determina la frecuencia o número de datos que corresponde a cada clase; por ejemplo, en la clase de 160 a 189.9 kg. solo hay dos osos, con pesos de __________ y __________, por lo que la frecuencia de esta clase es de 2. Si es necesario, para concluir la tabla se calculan también las frecuencias relativas de cada clase.

Con base en la tabla de frecuencias, se procede a trazar la gráfica correspondiente:

- Sobre el eje horizontal se colocan los intervalos de clase.
- En el eje vertical se marcan las frecuencias.
- Sobre cada intervalo tracen un rectángulo, cuya altura sea la frecuencia de ese intervalo de clase, y cuyos lados verticales correspondan a los límites ya marcados en el eje horizontal.

Por ejemplo, si los datos de salto de altura del Reto se agrupan como en esta tabla:

Prueba de salto de altura (cm)-Escuela "José Emilio Pacheco"
Alumnos de segundo grado 2018

Salto de altura (cm)	Frecuencia
70-74	2
75-79	4
80-84	4
85-89	9
90-94	11
95-99	7
100-104	5
TOTAL	42

TABLA 26.4 Prueba de salto de altura (cm) realizada a alumnos de segundo grado de la escuela "José Emilio Pacheco". 2018.

Entonces la gráfica que resultaría sería la siguiente:

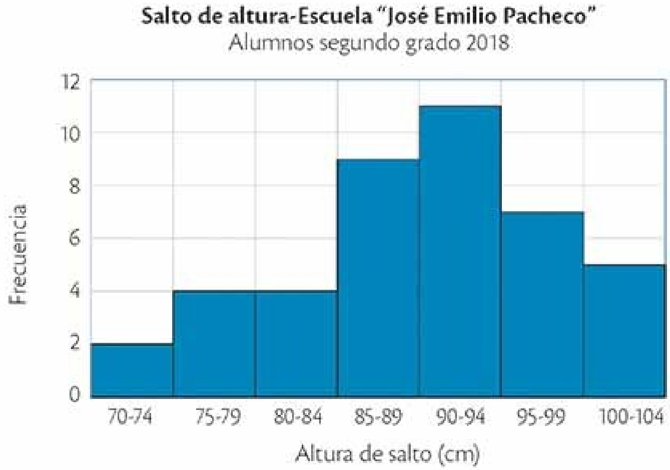


FIGURA 26.2 Histograma de los resultados de la prueba de salto de altura.

Expliquen qué diferencias observan entre un histograma como el de la figura 26.2 y las gráficas de barras, como la del inicio de la lección de la figura 26.1 con respecto a:

- Los conjuntos de datos a los que conviene aplicar uno u otro tipo de gráficas.

- La colocación de los datos en el eje horizontal individualmente o en grupos.

- ¿Qué otras diferencias, así como similitudes, encuentran entre ambos tipos de gráficas?

Discutan en los equipos, y compartan en el grupo, por qué consideran que los rectángulos en un histograma van unidos entre sí, sin dejar espacio entre ellos como en las gráficas de barras:

En resumen, en un histograma:

- Los intervalos de clase deben ser de la misma amplitud.
- Los rectángulos, cuya altura es igual a la frecuencia de cada clase, van unidos unos a otros, sin espacios entre ellos.
- En un histograma se pueden representar tanto frecuencias absolutas como relativas.

Los pasos para elaborar un histograma son:

1. Definir intervalos en el conjunto de datos.
   - Establecer los extremos de los intervalos, con base en los datos inferior y superior del conjunto.
   - Determinar la amplitud y número de intervalos adecuados.

2. Elaborar la tabla de frecuencias.
   - Asignar cada dato a un intervalo de clase.
   - Contar los datos que corresponden a cada intervalo, para obtener así las frecuencias.

3. Trazar la gráfica.
   - Ubicar sobre el eje horizontal los intervalos de clase.
   - Sobre cada intervalo, trazar un rectángulo cuya altura corresponda a la frecuencia, y cuya base sea igual a la amplitud del intervalo.

Revisen las preguntas planteadas en el reto y el nuevo reto y escriban en sus cuadernos un resumen sobre cómo nos sirven un histograma y su correspondiente tabla de frecuencias para describir un conjunto de datos.

Compartan en el grupo y con su profesor el trabajo realizado en esta sección.

¡A practicar!

1. Reúnete con un compañero y hagan lo que se indica.
   a) En la escuela "José Emilio Pacheco" recogieron datos sobre el tiempo que les toma a los alumnos de un grupo de segundo grado trasladarse de su casa a la escuela, sin importar el medio de transporte que utilicen. Se registraron los tiempos en minutos, se elaboró una tabla de frecuencias y se llegó al siguiente histograma.

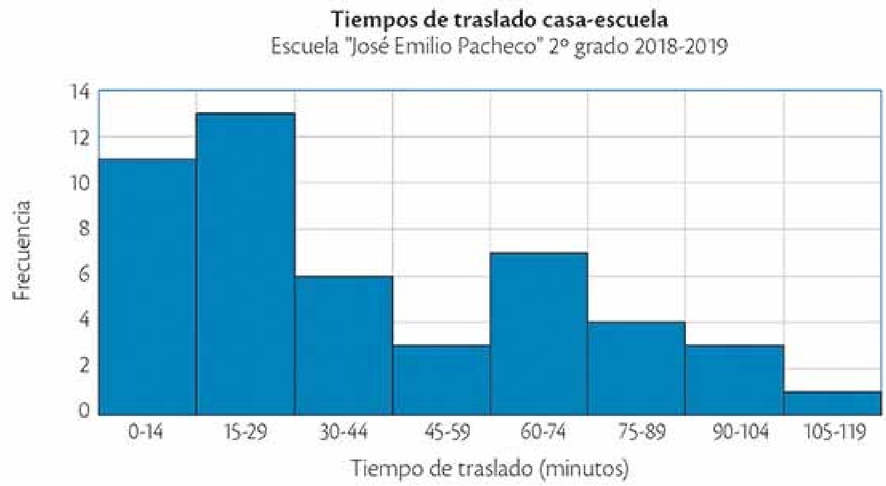


FIGURA 26.3 Histograma de los tiempos de traslado a casa, desde la escuela, de un grupo de alumnos de segundo grado.

b) Describan el conjunto de datos de tiempos de traslado con base en el histograma. Indiquen al menos en qué intervalo de clase están los menores y los mayores tiempos, y en qué intervalos se observa que llegan más alumnos a la escuela; expliquen sus respuestas a estas y cualquier otra característica de los datos que identifiquen.

c) Con el propósito de conocer cómo es el consumo de agua de las familias en la ciudad, se obtuvieron datos correspondientes a las casas en la colonia Los pirules. En la **TABLA 26.5** se organizan las frecuencias del consumo en volúmenes de agua, en metros cúbicos, que consumieron en estos hogares durante el último bimestre.

Consumo de agua por bimestre (m^3)	Frecuencia
5-14.99	14
15-24.99	6
25-34.99	8
35-44.99	3
45-54.99	4
55-64.99	4
65-74.99	1

TABLA 26.5 Consumo de agua en hogares de la colonia Los pirules. 2018.

- ¿Cuál es la amplitud de los intervalos de clase?
- Elaboren el histograma que corresponde a esta tabla de frecuencias y describan los datos de consumo de agua en la colonia.

d) Sobre las casas en la colonia Los pirules, además de los datos relativos a consumo de agua por bimestre, también se recogió el dato del tamaño o superficie de cada casa, expresado en metros cuadrados de construcción.

Superficie de las casas–Colonia Los pirules (metros cuadrados)
67, 97, 105, 108, 93, 82, 78, 85, 95, 123, 142, 131, 99, 151, 160,172, 112, 126, 109, 176,
84, 144, 155, 163, 115, 118, 95, 98, 132, 145, 97, 80, 120, 130, 103, 140, 122, 144, 132, 108

- Propongan y justifiquen un número y amplitud de intervalos de clase adecuados para estos datos.
- Elaboren la tabla de frecuencias y el histograma para organizar y representar los datos de superficies de las casas en esta colonia.
- Describan el conjunto de datos con base en la tabla y gráfica elaboradas.

e) Para el conjunto de datos de la primera situación de esta sección, tiempos de traslado casa-escuela, elaboren la tabla de frecuencias con frecuencias relativas; luego construyan el histograma correspondiente, con frecuencias relativas.

- ¿Qué diferencias y similitudes encuentran entre los dos histogramas —con frecuencias absolutas y con frecuencias relativas—? Expliquen.

Para terminar

1. Revisa tu trabajo de esta lección y escribe qué habilidades y conocimientos adquiriste o recordaste sobre tablas de frecuencias y gráficas, en particular sobre histogramas. Si te queda alguna duda, anótala y comenta con tu profesor.

2. Reúnete con un compañero, lean la siguiente información y hagan lo que se pide.

El profesor de español preguntó a sus alumnos cuántos libros habían leído el año escolar anterior. Encontró lo siguiente:

Portafolio de evidencias

Agrega a tu portafolio de evidencias la solución al Reto de esta lección, así como la descripción de un conjunto de datos a partir de su tabla de frecuencias o su histograma.

Libros leídos	Frecuencia
0 - 2	18
3 - 5	9
6 - 8	0
9 - 11	3
12 - 14	1

TABLA 26.6 Libros leídos por los alumnos el ciclo escolar previo.

a) Construyan el histograma correspondiente.
b) Describan sus datos a otra pareja.

¿Cómo te comunicas?

Aprendizaje esperado: Recolecta, registra y lee datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.

Contenido: Elabora y lee polígonos de frecuencia y gráficas de línea, a partir de tablas de frecuencias

Para arrancar

1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se pide.

a) Describan los datos representados en la **FIGURA 27.1**.

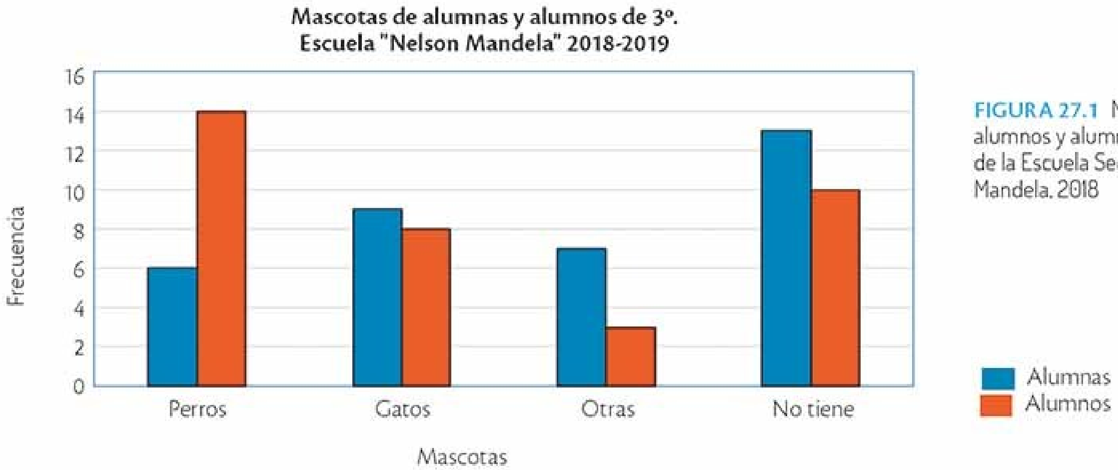


FIGURA 27.1 Mascotas de los alumnos y alumnas de tercero de la Escuela Secundaria Nelson Mandela. 2018

- ¿Cuáles conjuntos de datos se incluyen en la gráfica? __________
- ¿Qué tipo de datos se ubican sobre cada uno de los ejes de la gráfica? ______
- Comparen las diferentes frecuencias entre alumnos y alumnas
- Señalen otras características importantes de la gráfica.

b) Comenten en el grupo y con su docente la descripción que hicieron.

Reto

1. Reúnete con tres compañeros y resuelvan el siguiente problema.

El profesor de español de segundo grado de la escuela recogió los siguientes datos, sobre el tiempo que durante el día, los alumnos y alumnas utilizan su teléfono celular, sin importar el propósito con que lo usen (no se incluyen los pocos alumnos que no contaban con teléfono el día que se realizó la encuesta).

Alumnos y alumnas 2º. grado de la escuela "Nelson Mandela"

Tiempo (horas)	Frecuencia alumnos	Frecuencia alumnas
0-1.9	8	12
2-3.9	9	12
4-5.9	15	6
6-7.9	5	3
8-9.9	2	4
10-11.9	1	3

TABLA 27.1 Tiempo de uso del teléfono celular por día.

LECCIÓN 27

Relaciónalo

En la lección anterior se trabajó con conjuntos de datos cuantitativos; los procedimientos que se estudiaron para organizar y caracterizar conjuntos grandes de este tipo de datos, parten de definir intervalos de clase, para luego elaborar tablas de frecuencias y las gráficas denominadas histogramas. Si lo consideras necesario, revisa tus notas de esa lección.

a) Representen gráficamente los dos conjuntos de datos (el de los alumnos y el de las alumnas).
- ¿Qué tipo de gráfica se debe utilizar, de acuerdo a como están presentados los datos en la tabla de frecuencias?
  Expliquen ______________________________
  ____
- Describan los conjuntos de datos de tiempo de alumnos y alumnas por separado.
- Después compárenlos.

b) Respondan las siguientes preguntas.
- Algunos alumnos han comentado que sus compañeras "no se despegan" del celular, ¿qué tan cierto será?
- ¿Pueden incluir los dos conjuntos de datos en una sola gráfica? Expliquen

c) Comenten sus resultados entre equipos y con su profesor.

Pistas

e

1. En los mismos equipos del Reto lean las siguientes preguntas y sugerencias, pueden orientarlos para resolver el Reto.
- En una gráfica de barras pueden visualizarse los datos de dos o más conjuntos de datos.
- En un histograma ¿se pueden representar dos conjuntos de datos agrupados en intervalos de clase?
- ¿Cómo se representan los números sobre el eje horizontal de un histograma?
- Una forma sencilla para incluir datos de dos conjuntos en una sola gráfica, consiste en marcar con un punto la frecuencia de los alumnos, a la mitad de la amplitud de cada intervalo, y con otro punto la frecuencia de las alumnas; a continuación unir los puntos que corresponden a los alumnos con segmentos, y lo mismo con los puntos de las alumnas.

Para analizar

Un nuevo reto

e

1. Reúnete con dos compañeros, lean la información y hagan lo que se indica.

El turismo es una de las actividades económicas más importantes de México, y una de las mayores en el mundo. Durante 2017 recibimos a más de 39 millones de visitantes extranjeros. La **TABLA 27.2** muestra el número de viajeros internacionales que llegaron a nuestro país cada mes del año 2017 (Fuente: http://www.inegi.org.mx/sistemas/bie/cuadrosestadisticos/GeneraCuadro.aspx?s=est&nc=473&c=27665. Fecha de consulta: 8 de agosto de 2018).

(Miles de personas)

Mes	Número de turistas (miles de personas)
Enero	2 992
Febrero	2 936
Marzo	3 498
Abril	3 235
Mayo	3 084
Junio	3 474
Julio	3 718
Agosto	3 021
Septiembre	2 675
Octubre	3 010
Noviembre	3 428
Diciembre	4 224

TABLA 27.2 Turistas internacionales recibidos en México por mes, 2017.

a) Elaboren una gráfica donde se muestren los distintos números de turistas que nos visitaron en los meses del año.
- Coloquen los meses en el eje horizontal y las cantidades de visitantes sobre el eje vertical.

b) Describan el conjunto de datos.
- ¿Cuáles son las variaciones en el número de turistas en los diferentes meses del año?

c) Comparen y comenten sus resultados entre los equipos y con su profesor.

Formalización

1. . En parejas, lean la siguiente información, completen y hagan lo que se indica.

a) Para graficar los datos de tiempo de uso de teléfonos celulares, empiecen por los datos de los alumnos:

Tiempo de uso del teléfono celular por día
Alumnos 2º. Grado-Escuela "Nelson Mandela"

Tiempo (horas)	Frecuencia alumnos
0-1.9	8
2-3.9	9
4-5.9	15
6-7.9	5
8-9.9	2
10-11.9	1

TABLA 27.3 Tiempo de uso del teléfono celular por día.

Se vale

Comunicación asertiva

Cuando te comunicas con tus compañeros, con alguien de tu familia o con tus profesores, ¿pones atención de manera activa, procurando entender los argumentos y puntos de vista de la otra persona? ¿O sólo estás pensando en lo que a ti te interesa? ¿De qué depende? ¿Tiene algo que ver el medio que utilices?

Compartan en grupos de 4 o 5 alumnos, y después en el grupo.

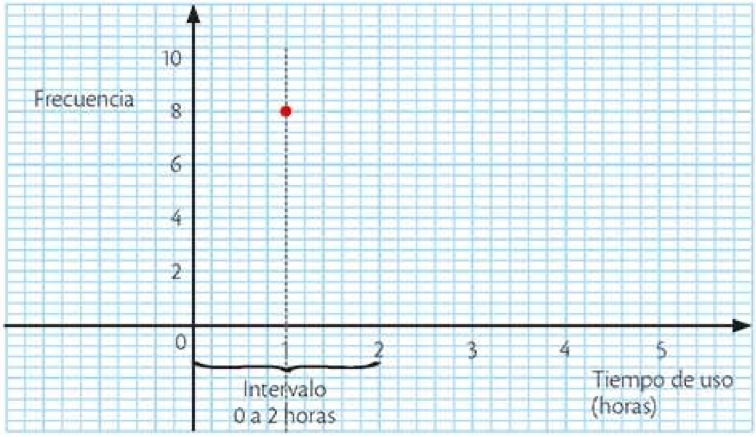


FIGURA 27.2 Ubicación del punto correspondiente a la frecuencia del primer intervalo de tiempo marcado en la tabla 27.3.

- De la misma manera, se terminan de localizar los puntos que representen la altura de las frecuencias de cada clase, siempre a la mitad de la amplitud de los intervalos de clase.
- Se ubican también los puntos correspondientes a los tiempos de uso de las alumnas, sobre el mismo plano cartesiano;

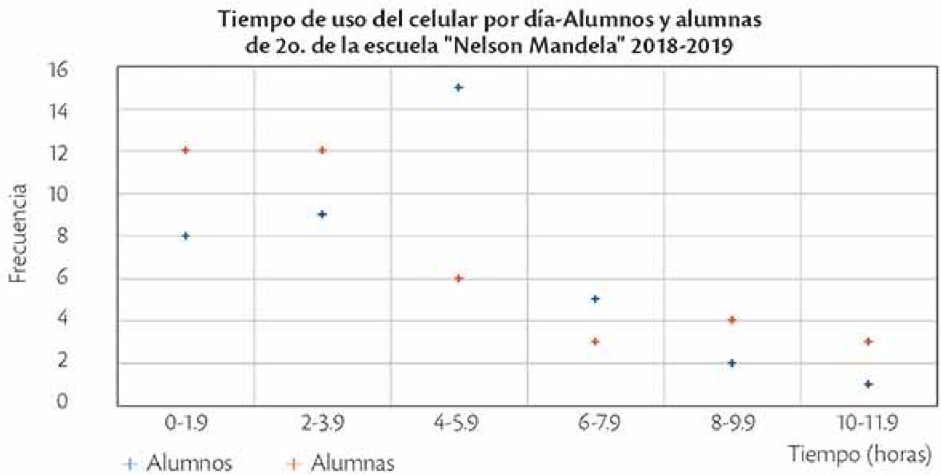


FIGURA 27.3 Frecuencia del tiempo, agrupado en intervalos, del uso de celular de alumnos y alumnas.

- Para concluir, se unen con segmentos los puntos que representan las frecuencias de los alumnos, y con otros segmentos los puntos que corresponden a las alumnas.

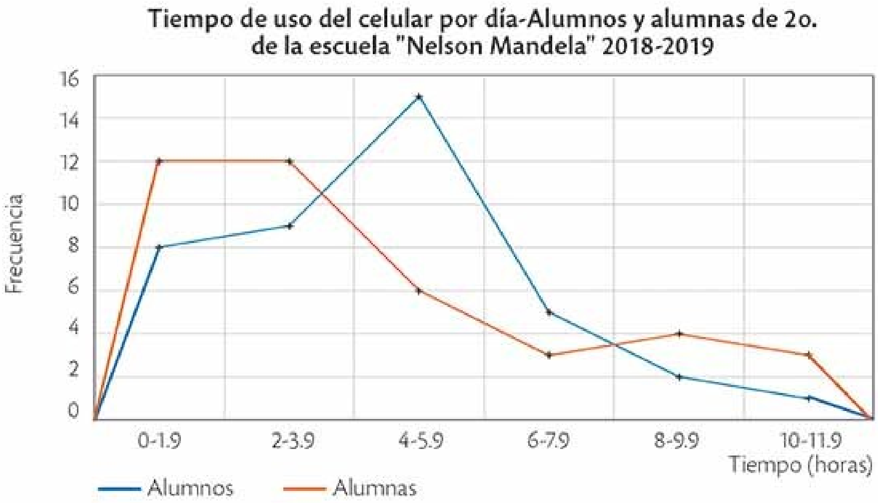


FIGURA 27.4 Polígono de frecuencias del tiempo de uso del celular.

Este tipo de gráficas se conoce como polígono de frecuencias. Se pueden incluir uno o más conjuntos de datos. También se pueden utilizar con frecuencias absolutas o relativas.

En resumen, para elaborar un *polígono de frecuencias* es necesario:

1. Ubicar los intervalos de clase sobre el eje horizontal.
2. Ubicar las frecuencias sobre el eje vertical; sobre una recta vertical que parte del punto medio de cada intervalo, se marcan tantos puntos como conjuntos de datos se vayan a incluir en el mismo plano cartesiano.
3. Finalmente se unen con segmentos los puntos que representan las frecuencias de cada conjunto de datos.

Con base en los polígonos de frecuencias, describan por separado, los datos

- De los alumnos: ____

- De las alumnas: ____

- Comparen las dos descripciones, por ejemplo, ¿en qué intervalos de horas se observan las mayores frecuencias para los alumnos y para las alumnas?, ¿son iguales o diferentes? Justifiquen cada una de sus respuestas ______________________

¿En qué se distinguen y en qué son similares la representación de los datos en un histograma y en un polígono de frecuencias? Expliquen ______________________

¿En qué casos consideran que es conveniente utilizar frecuencias relativas en un polígono de frecuencias? ______

______

Comparen entre equipos y comenten con su profesor.

b) Con respecto a los datos sobre turismo en México, si se organizan como se indicó en la sección Un nuevo reto, se obtiene una gráfica como la siguiente. Este tipo de gráfica se conoce como una gráfica de línea.

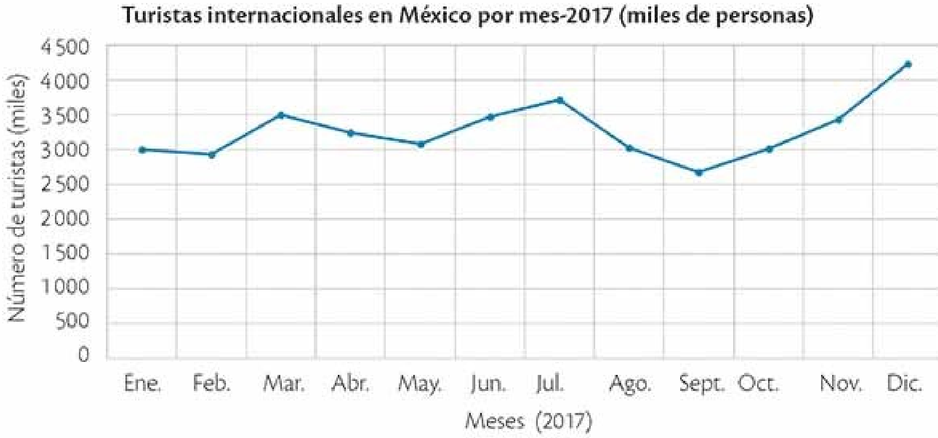


FIGURA 27.5 Gráfica de línea del número de turistas internacionales por mes en México durante el 2017.

Los valores en el eje vertical pueden ser también porcentajes; así mismo, en una gráfica de línea pueden incluirse dos o más conjuntos de datos.

En las gráficas de línea:

- ¿Qué datos se representan sobre el eje horizontal? ______
- ¿Cuáles datos se colocan sobre el eje vertical del plano cartesiano?

  ______
- ¿Puedes comparar entre sí los valores de una variable, en diferentes fechas o periodos? Explica tu respuesta ______

Las diferencias y similitudes entre histogramas y gráficas de barras, ya se estudiaron en la lección anterior. Ahora señalen qué aspectos distinguen y en cuáles son semejantes las gráficas de línea y los polígonos de frecuencias; por ejemplo, con respecto a los datos que pueden ser tratados u organizados con uno y otro tipo de gráfica; y sobre el tipo de información que se puede observar en ellas. Expliquen sus respuestas ______

______

______

______

Resumiendo, para elaborar una *gráfica de línea*:

1. Sobre el eje horizontal se representan intervalos iguales de tiempo: pueden ser horas, días, meses, años u otras unidades.
2. Sobre el eje vertical se miden los valores de la otra cantidad que varía; en la gráfica se representan con un punto que se ubica a la mitad del intervalo de clase.
3. Se unen los puntos con segmentos.

Compartan y comenten sus observaciones elaboración y uso de estos tipos de gráficas en el grupo y con el profesor.

¡A practicar!

1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica.

a) Los siguientes son los tiempos de traslado, de su casa a la escuela, de los alumnos de dos grupos del segundo grado en la escuela "Nelson Mandela", expresados en porcentaje por cada intervalo de clase.

- Describan los tiempos de traslado de cada grupo y compárenlos entre sí.

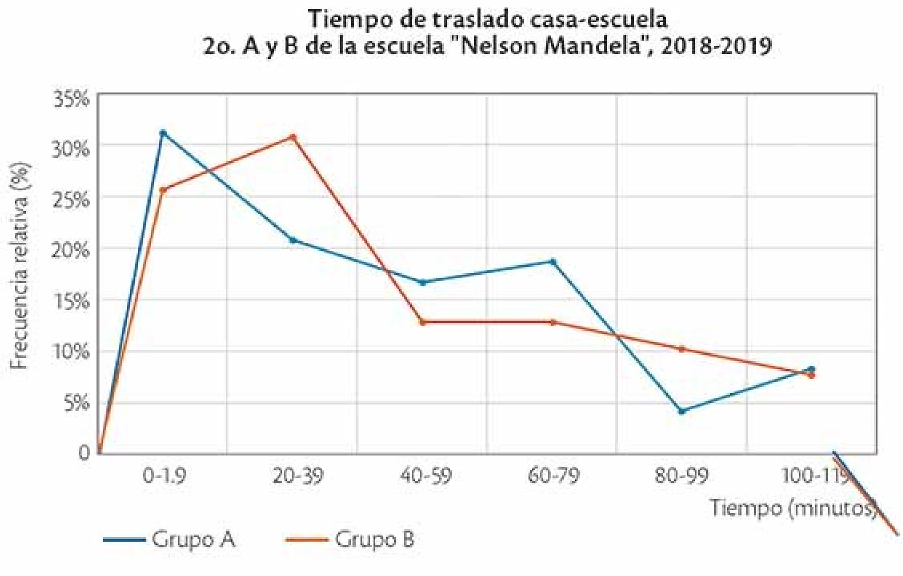


FIGURA 27.6 Tiempo de traslado casa-escuela de dos grupos de estudiantes de la escuela Nelson Mandela.

b) Para comparar el consumo de agua de las familias en dos colonias de la ciudad, se obtuvieron datos correspondientes a igual número de casas en cada una de ellas. Los siguientes son los volúmenes de agua en metros cúbicos que consumieron en estos hogares durante el último bimestre.

Consumo de agua por bimestre (m^3)	Frecuencia de colonia Los pirules	Frecuencia de colonia Jardín de la sierra
5-14.99	14	9
15-24.99	6	9
25-34.99	8	8
35-44.99	3	5
45-54.99	4	4
55-64.99	4	3
65-74.99	1	2

TABLA 27.4 Consumo de agua en hogares de dos colonias, 2018.

- Elaboren un polígono de frecuencias, describan y comparen los consumos de agua en las dos colonias.

c) Los siguientes son los datos de la población total de México registrada en los censos de 1950 a 2010. Representen estos datos en una gráfica de línea y describan su evolución durante estos años (Fuente: INEGI; http://www.beta.inegi.org.mx/temas/estructura/. Fecha de consulta: 8 de abril de 2018).

Año	Población (miles de habitantes)
1950	25 791
1960	34 923
1970	48 225
1980	66 847
1990	81 250
2000	97 483
2010	112 337

TABLA 27.5 Población de México 1950-2010.

TIC

e

1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica.

a) Entren al sitio de internet del Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) (http://www.beta.inegi.org.mx/default.html), entren al menú Datos y seleccionen un tema.

- Identifiquen al menos una gráfica de cada uno de los siguientes tipos: de barras, circular, histograma, polígono de frecuencias, gráfica de línea.
- Identifiquen o formen un conjunto de datos que se pueda representar con alguno de los tipos de gráfica anteriores; para esto, entren al menú Tabulados.

Entre los temas más recomendables para esta investigación están los siguientes: Hogares y vivienda; Población; Tecnologías de la información y la comunicación (TIC en hogares); Medio ambiente; Educación; Transporte.

b) Compartan y justifiquen con otro equipo sus selecciones.

Para terminar

1. Revisa tus actividades de esta lección, anota qué habilidades y conocimientos adquiriste o recordaste sobre tablas de frecuencias y gráficas, en particular sobre polígonos de frecuencias y graficas de línea. Si te quedan dudas, regístralas y comenta con tu profesor.

2. Por parejas hagan lo que se pide.

Los profesores de español preguntaron a sus alumnos al inicio del año escolar, cuántos libros habían leído durante el año anterior. Encontraron lo siguiente:

Libros leídos	Frecuencia Grupo A	Frecuencia Grupo B
0-2	18	15
3-5	9	8
6-8	4	7
9-11	3	5
12-14	1	0

TABLA 27.6 Libros leidos por los alumnos el ciclo escolar previo en la escuela "Miguel de Cervantes", segundo grado 2018-2019.

a) Construyan los polígonos de frecuencias correspondientes y describan estos datos a otro equipo.

Portafolio de evidencias

Para incorporar a tu portafolio de evidencia, selecciona la solución al Reto de esta lección, y un ejercicio en el que describas un conjunto de datos utilizando su gráfica de línea.

Que el trayecto sea breve

Aprendizaje esperado: Usa e interpreta las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decide cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.

Contenido: Descripción de conjuntos de datos mediante sus medidas de tendencia central, rango y desviación media

Relaciónalo

Las medidas de tendencia central de un conjunto de datos, así como el rango se estudiaron en primer grado.

La *media aritmética* de un conjunto de datos se obtiene dividiendo la suma de los datos entre el número total de datos.

Para obtener la *mediana*, los datos deben ordenarse de menor a mayor, incluyendo todos los valores observados, aunque estén repetidos. La mediana es el dato que está a la mitad de la lista; si el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos datos que están en medio de la lista.

La *moda* de un conjunto de datos es el dato que se observa con mayor frecuencia.

Cualquiera de estas tres medidas –media aritmética, mediana, moda– puede representar con un solo valor a todo el conjunto de datos. Indican dónde se concentran los datos o dónde se podría ubicar el centro del conjunto. Por ello, se les conoce como medidas de tendencia central.

El *rango* es la diferencia entre el mayor y el menor de los datos. Es una forma de medir la separación o dispersión entre los datos de un conjunto.

e

LECCIÓN 28

Para arrancar

1. Resuelve lo que se pide.

Minerva camina para estar en buena condición física. Las distancias que recorrió la semana pasada fueron de 3.4, 2.5, 4.7, 3.8 y 4 kilómetros.

a) ¿Cuál fue la distancia media que recorrió en esa semana? ______

b) Calcula las medidas de tendencia central de sus trayectos.

- ¿Cuál fue la diferencia entre la mayor y la menor de sus distancias de la semana? ______

c) Comenta tus resultados en el grupo y con tu docente.

Reto

1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica.

En la escuela "José Pablo Moncayo" están recogiendo datos de los alumnos con el propósito de organizar mejor sus traslados entre sus hogares y la escuela. Los siguientes corresponden a uno de los grupos de segundo grado, y se refieren a:

- Tiempo promedio de una semana en minutos de traslado de su casa a la escuela.

Grupo A	12, 15, 4, 73, 65, 89, 23, 55, 95, 79, 70, 62, 9, 29, 24,
Grupo B	72, 98, 7, 8, 24, 35, 27, 12, 19, 22, 19, 11, 33, 75, 24

- La colonia en que viven.

Grupo A	S	S	S	G	B	B	L	O	B	B	B	O	S	L	L
Grupo B	G	B	S	S	L	O	L	S	L	O	L	S	O	G	L

- Número de hermanos que tiene en la escuela.

Grupo A	1	0	0	1	0	2	0	0	1	1	1	1	0	1	0
Grupo B	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0

Las colonias donde residen los alumnos se indican como muestra la **TABLA 28.1**.

Colonia	Símbolo
Bosquecito	B
Los Gatos	G
La Luz	L
San Esteban	S
Otras	O

TABLA 28.1 Nomenclatura de cada colonia en la que residen los alumnos.

a) Obtengan las medidas de tendencia central y los rangos para cada conjunto de datos.
b) Expliquen cuáles medidas de tendencia central obtuvieron, y cuál es la medida más adecuada para cada conjunto, sus resultados y procedimientos.
c) Obtengan los rangos de cada conjunto de datos y expliquen sus resultados.
d) Comenten sus resultados entre equipos y con su docente.

Pistas

1. Lean las siguientes preguntas en los mismos equipos de Reto, les pueden ayudar al resolver el Reto y comprobar sus resultados.
   a) Al calcular la mediana, la media o la moda, ¿cómo se toman en cuenta los datos repetidos y aquellos cuyo valor es de cero?
   b) Las medidas de tendencia central de un conjunto de datos.
   - ¿Son siempre iguales?
   - ¿Tienen que ser números enteros?
   - ¿Algunas pueden ser igual a algún dato o pueden ser uno de los extremos del conjunto de datos?

Para analizar

Un nuevo reto

1. Reúnete con dos compañeros y hagan lo que se indica.

Marcela y Heriberto se están iniciando en la elaboración y venta de ensaladas. Para saber cómo va su negocio, tomaron los datos de ventas de dos semanas recientes; quieren ver si ha cambiado el promedio de sus ventas, y también que tanta variación hay entre los días de la semana.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Semana 2	990	1140	1260	1625	1375	870
Semana 4	1170	1200	1280	1655	1205	900

TABLA 28.2 Ventas de ensaladas por día ($). Semanas 2 y 4.

a) Obtengan las medidas de tendencia central para cada semana.

	Media aritmética	Mediana
Semana 2		
Semana 4		

TABLA 28.3 Media y mediana de los datos correspondientes a las semanas 2 y 4.

b) Comparen la media y la mediana de la cuarta semana con las de la segunda semana de ventas.

- ¿Qué tan diferentes son? ______________________________
- ¿Es importante o pequeño el cambio en estas medidas? Expliquen.

____

____

c) Veamos ahora la variación en las ventas de un día a otro, dentro de cada semana. Para ello, Marcela y Heriberto calcularon los rangos para cada semana.

	Rango
Semana 2	
Semana 4	

TABLA 28.4 Rango de valores para los datos de las semanas 2 y 4.

- ¿Qué indican los resultados anteriores acerca de la diversidad de ventas durante cada semana? Expliquen. ______________________________

____

d) Sin embargo, Heriberto aún no está satisfecho: considera que posiblemente la separación entre las ventas de distintos días es diferente en estas dos semanas. Decide representar los datos de ventas sobre rectas numéricas y compararlas.

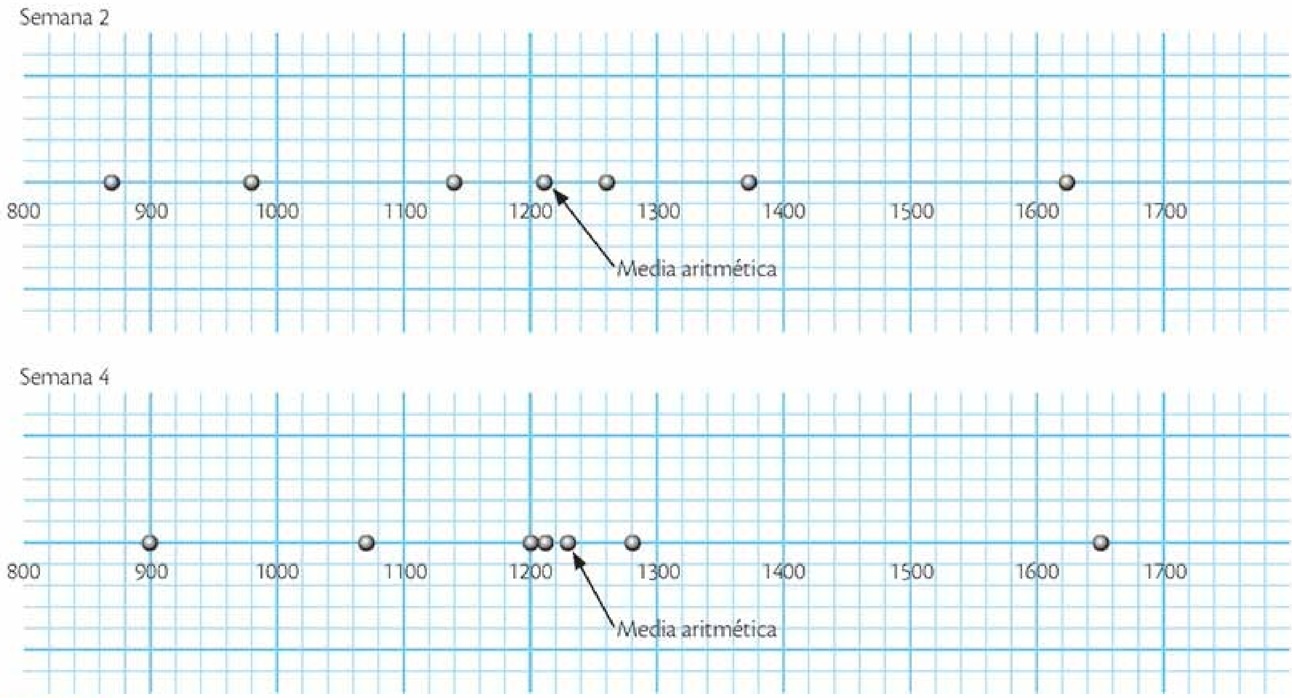


FIGURA 28.1 Ventas de las semanas 2 y 4 ubicados en una recta numérica.

- Observando las representaciones anteriores, ¿consideran que la separación entre los datos de ventas es similar o diferente en las dos semanas? Expliquen su respuesta. ____________________
- Para calcular el rango de los datos de una semana, ¿qué datos se toman en cuenta? ¿Todos o sólo algunos? Expliquen. ____________________
- Las distancias de los diferentes datos de ventas respecto de la media aritmética, ¿son de magnitud similar o difieren de una semana a otra? ____________________

e) A fin de medir con precisión la separación o distancia de los datos respecto del valor de la media de cada semana, Marcela y Heriberto deciden calcular la distancia de cada dato a la media aritmética.

- Completen las **TABLAS 28.5** y **28.6**.

Ventas ($)	870	990	1 140	1 260	1 375	1 625
Distancia a la media aritmética	340					

TABLA 28.5 Ventas ($) y distancia respecto de su media. Semana 2.

Ventas ($)	900	1 170	1 200	1 205	1 280	1 655
Distancia a la media aritmética	335					

TABLA 28.6 Ventas ($) y distancia respecto de su media. Semana 4.

f) Obtengan ahora la media aritmética de las distancias de los datos de ventas, con respecto a la media de las ventas de su semana.

	Media aritmética de distancias respecto de su media
Semana 2	
Semana 4	

TABLA 28.7 Media aritmética obtenida de las distancias de cada dato a su media aritmética.

- ¿Cuál es la diferencia entre las dos semanas, con base en estos últimos cálculos? ¿Se confirma lo observado en las rectas numéricas anteriores? ____________________
- Calculando el promedio de las distancias a su media aritmética para un conjunto de datos ¿se obtiene información adicional a la que nos da el rango de esos datos? Expliquen. ____________________

g) Comenten entre equipos y con su docente, sobre sus observaciones en esta actividad.

2. Reúnete con un compañero y hagan lo que se indica.

Los salarios mensuales del personal que trabaja en la empresa turística "Tesoros Naturales" son los siguientes:

Salario mensual ($)
5 200, 4 640, 4 750, 5 120, 10 540, 16 732, 5 058, 4 890, 4 695, 5 310

a) Representen estos datos en una recta numérica; describan su distribución a lo largo de la recta.
   - ¿En qué intervalo se concentra la mayor parte de los datos?

b) Calculen la media aritmética y la mediana y ubíquenlas en la recta numérica, junto con los datos.
   - ¿Cuál de estas dos medidas está alejada de donde está la mayor parte de los salarios?
   - ¿Cuál de estas dos medidas consideran que representa mejor al conjunto de los salarios de la empresa? Expliquen su respuesta.

c) Compartan y comparen sus resultados con los de otra pareja.

Formalización

e

1. En los mismos equipos de Un nuevo reto, lean la información completen y hagan lo que se indica.

Las medidas de tendencia central que se han estudiado tienen diferentes características, las cuales pueden servir para encontrar la más adecuada y útil en la descripción de diferentes casos de conjuntos de datos.

Comparen la moda para los siguientes conjuntos de datos: las distancias recorridas por Minerva; los números de hermanos de los alumnos de la escuela "José Pablo Moncayo"; las colonias de donde provienen los alumnos de esa escuela.

- ¿Cuántas modas puede haber en un conjunto de datos?, ¿se puede obtener la moda en conjuntos con diferentes tipos de datos –cuantitativos o cualitativos–? Expliquen. ______________________

  ____

Obtengan la media aritmética y la mediana de los siguientes conjuntos de datos: los tiempos de traslado de los alumnos de la escuela "José Pablo Moncayo"; las colonias de donde provienen los alumnos de esa escuela.

- ¿Fue factible calcularlas en ambos casos? ______________________
- ¿En qué conjuntos de datos se pueden aplicar estas dos medidas de tendencia central? Expliquen. ______________________

  ____

Observen los datos de salarios del ejercicio 3, así como la media aritmética y la mediana, y su representación en la recta numérica.

- ¿Cuál de las dos medidas está más próxima al intervalo donde se concentran la mayor parte de los salarios?
- ¿Cuál consideran que es la medida de tendencia central más adecuada para representar a un conjunto de datos como éste, donde hay uno o varios datos que son muy diferentes de los demás? Expliquen su repuesta. ______________________

  ____

Para conocer la dispersión de los datos de un conjunto, desde primer grado se ha utilizado el rango. El rango nos proporciona una medida de la separación o espacio entre los datos de un conjunto determinado.

- Para calcular el rango, ¿cuáles datos del conjunto son los que se utilizan?

  ____

Lo anterior implica que el rango indica que tan amplio es el intervalo donde se ubican todos los datos del conjunto

- ¿El rango permite conocer qué tan juntos o separados entre sí están los datos, dentro de ese intervalo? Expliquen _______________

____

En la situación de la sección Un nuevo reto anterior, donde se comparan dos conjuntos de datos de ventas:

- ¿Los rangos eran iguales o diferentes? _______________
- Al ubicar los datos sobre una recta numérica, ¿se encontró que los datos tenían entre si separaciones semejantes o diferentes? _______________

Expliquen _______________

____

En esa sección se desarrolló un procedimiento que toma en cuenta todos los datos de un conjunto, para dar otra medida de su distribución, de la separación o espacios que existen entre ellos. Este procedimiento se denomina *desviación media*.

Para obtener la desviación media de un conjunto de datos es necesario:

1. Calcular la media aritmética de los datos.
2. Obtener las distancias de cada dato a la media aritmética.
3. Calcular la media aritmética de esas distancias.

El rango y la desviación media se conocen como medidas de dispersión de los datos de un conjunto.

Contesten lo siguiente:

¿Cuál es la medida de tendencia central con respecto a la cual se mide la separación de cada dato, al calcular la desviación media? _______________

¿Cómo se mide la separación o distancia entre cada dato y la media del conjunto de datos? _______________

¿Cuál de las dos medidas de dispersión consideran que proporciona una mayor precisión de la dispersión o separación de los datos? Expliquen _______________

____

¿Cuál de las dos medidas es más sencilla de calcular y cual requiere más operaciones para obtenerla? _______________

¿Qué ventajas y desventajas que tienen estas dos medidas de dispersión?

____

Comenten entre equipos y con su profesor, sus observaciones sobre esta sección

Relaciónalo

Valor absoluto. El valor absoluto de un número es igual al número si este es mayor o igual a cero; si el número es menor que cero, su valor absoluto es el mismo número, pero se le cambia de signo. El valor absoluto de la diferencia entre dos números, nos indica la distancia que hay entre esos dos números.

¡A practicar!

1. Lee la información presentada en cada caso y haz lo que se indica a continuación.
   a) Jacinto diseñó y subió su página web personal. Después de tres meses tomó una muestra de 15 personas que habían estado en su sitio, para saber cuántas veces lo habían visitado en ese lapso. Obtuvo los siguientes datos:

      20, 17, 4, 20, 1, 84, 14, 36, 5, 68, 19, 1, 1, 22, 3,

      - Determina las medidas de tendencia central del número de visitas a la página web de Jacinto.
      - ¿Cuál de ellas es la más adecuada para describir estos datos?
      - Calcula el rango y la desviación media. Explica el significado de cada una en este caso.

   b) Un fabricante de pinturas para casas vende su producto en botes de 4 litros. Sin embargo, debido al proceso automático de llenado en la fábrica, siempre hay variaciones en el contenido real de cada bote. Se tomó una muestra, se midieron los contenidos y se obtuvieron los siguientes valores en mililitros:

Contenido real de pintura (ml)
4030, 3988, 3880, 3910, 4018, 3975, 3922, 3922

- Calculen la moda, mediana y media aritmética, así como las medidas de dispersión de estos contenidos de pintura.
- ¿Cuál de las medidas de tendencia central es la más adecuada para representar estos contenidos?
- La empresa ha establecido la norma de que la desviación media de los contenidos de una muestra no debe exceder los 80 mililitros con respecto a la media de la muestra. ¿La muestra tomada cumple con la norma?
- ¿Cuál es la importancia de esta norma para los consumidores?
- Coméntenlo en el grupo.

Se vale

Responsabilidad

La empresa que se menciona, al adoptar y vigilar el cumplimiento de una norma de calidad de sus productos, muestra que se preocupa por desempeñar sus funciones y actividades de manera adecuada y respeto de las necesidades sociales.

Comenten en el grupo qué instituciones responsables hay en su comunidad y cómo lo manifiestan.

p

2. Reúnete con tres o cuatro compañeros. Las actividades a realizar son:

- Recolectar datos en la comunidad, en el hogar o dentro de la escuela. Pueden ser los precios de algún producto o servicio en varios establecimientos o el número de refrescos consumidos por día por las familias.
- Organizar los datos elaborando tablas de frecuencias.
- Construir una representación gráfica adecuada a sus datos. Puede ser recta numérica, grafica de barras, histograma, etcétera.
- Obtener las medidas de tendencia central y de dispersión; identificar las más adecuadas para sus datos.
- Presentar al grupo; responder preguntas y resolver dudas.

TIC

e

1. Reúnete con algunos compañeros para llevar a cabo este ejercicio.

Las indicaciones a continuación son para utilizar una hoja de cálculo, en un equipo de cómputo, pero también puede resolverse con papel, lápiz y una calculadora.

a) Para la primera mitad de los datos de tiempo de traslado del grupo de la escuela "José Pablo Moncayo", vamos a obtener sus medidas de tendencia central y de dispersión. Los datos son, en minutos:

12, 15, 4, 73, 65, 89, 23, 55, 95, 79, 70, 62, 9, 29, 24

- Para empezar, en una hoja de cálculo introduzcan los datos en una columna.
- En otra columna cercana, introduzcan los siguientes textos, uno en cada fila: "Media aritmética", "Mediana", "Moda", "Rango", "Desviación media"; pueden verse en la **FIGURA 28.2**.
- En la celda a la derecha de "Media aritmética", introduzcan la siguiente formula: =PROMEDIO(B3:B17).
  Para localizar la función PROMEDIO hay que entrar al menú:
  FÓRMULAS ⟶ *Más funciones* ⟶ *Estadísticas*
  B3:B17 es el conjunto de celdas donde están los datos.
- En la celda a la derecha de "Mediana", introduzcan la fórmula: =MEDIANA(B3:B17). La función MEDIANA está en la misma trayectoria que la anterior.
- A la derecha de "Moda", introduzcan: =MODA.UNO(B3:B17).
- A la derecha de "Rango", introduzcan la siguiente expresión: =MAX(B3:B17)-MIN(B3:B17). Las dos funciones, MAX y MIN, están en la misma trayectoria.
- Finalmente, en la celda a la derecha de "Desviación media", introduzcan: =DESVPROM(B3:B17).

	A	B	C	D	E	F
1						
2		Tiempos de traslado-Alumnos de 2o. Grado (minutos)				
3		12		Media aritmética		
4		15		Mediana		
5		4		Moda		
6		73		Rango		
7		65		Desviación media		
8		89				
9		23				
10		55				
11		95				
12		79				
13		70				
14		62				
15		9				
16		29				
17		24				
18						
19						
20						
21						

FIGURA 28.2 Obtención de medidas de tendencia central y de dispersión en una hoja de cálculo.

Al introducir las formulas y expresiones anteriores, aparecen los resultados en las celdas respectivas.

b) Observen lo que sucede al buscar funciones, ¿qué aparece al colocar el cursor sobre el nombre de una de ellas? ____________________

c) ¿Cuál es la medida de tendencia central más adecuada para representar estos datos? ____________________

d) ¿Qué nos indican las medidas de dispersión sobre la distribución de estos tiempos de traslado? Expliquen. ____________________

e) Comenten sobre este ejercicio en el grupo y con su profesor o profesora.

Para terminar

1. Escribe en tu cuaderno cualquier duda que todavía tengas sobre los temas de esta lección, para que los comentes con tu docente. Registra qué habilidades y conocimientos adquiriste, y cuál te ayudó a recordar el trabajo de esta lección, acerca de las medidas de tendencia central y de dispersión de conjuntos de datos.

2. Reúnete con un compañero y resuelvan lo siguiente.

Los siguientes son los números de alumnos en cada uno de los grupos de la escuela "José Pablo Moncayo": 40, 42, 44, 33, 34, 35, 43, 44.

a) Ubiquen la matrícula de los grupos en una recta numérica y calculen las medidas de tendencia central y las de dispersión.

b) Elijan la medida de tendencia central que sea más adecuada para esta situación y justifiquen su elección.

c) Expliquen cómo describe la distribución o separación de los datos cada una de las medidas de dispersión y cuáles son las ventajas de una y otra.

Portafolio de evidencias

Incorpora a tu portafolio de evidencias, tu trabajo de la sección anterior, Para terminar.

¿Qué va a salir?

Aprendizaje esperado: Determina la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.

Contenido: Experimentos aleatorios y probabilidad teórica; comparación con probabilidad frecuencial

Para arrancar

1. Reúnete con un compañero, lean la información y hagan lo que se pide. Utilicen lo que aprendieron en primer grado sobre probabilidad frecuencial.

Relaciónalo

Una forma de obtener la probabilidad de un evento, que se utilizó en primer grado, es la de *probabilidad frecuencial*: para medir la mayor o menor tendencia de un evento a ser observado, se calcula la frecuencia relativa con que ocurre:

Probabilidad frecuencial del evento

$$E = P(E) = \frac{\text{Frecuencia con que ocurre el evento } E}{\text{Número de veces que se realizó el experimento}}$$

siempre que el experimento se haya repetido un gran número de veces.

Laura y Gregorio colocaron en una caja canicas de igual tamaño, pero de dos diferentes colores. No saben cuántas hay de cada color. Como van a jugar con sus amigos a adivinar cuál color sale primero, antes quieren hacer unas pruebas: sacan una, anotan su color, la regresan a la caja y mezclan bien las canicas. Repitieron muchas veces esta operación y registraron lo siguiente:

Color de la canica extraída	Frecuencia
Blanca	63
Roja	87

TABLA 29.1 Número de veces que se extrajo de la caja una canica.

a) Respondan las siguientes preguntas:
- ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que la siguiente canica que saquen sea blanca?
- ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de que sea roja?

b) Comenten en el grupo y con su profesor qué sucede con la probabilidad frecuencial si se incrementa el número de extracciones.

Reto

1. Reúnete con un compañero, lean y contesten las siguientes preguntas. Utilicen solo la información que aquí se proporciona; no realicen ninguna repetición de los experimentos aleatorios.

a) Efrén trae en su mochila cinco memorias USB del mismo tamaño. Mete la mano sin ver y saca una. ¿Cuál es la probabilidad de que sea la memoria donde guardó las fotografías que quiere enseñarles a sus amigos?

b) Lorena va a escoger un día del mes de noviembre, porque ese día la van a invitar a un parque de diversiones. Lorena va a poner su dedo —con los ojos cerrados— sobre un calendario de ese mes impreso en una hoja de papel. ¿Cuál es la probabilidad de que Lorena escoja el día 12?

c) Se va a efectuar una rifa. Se pondrán papelitos doblados en una caja cada uno con los números del 1 al 50. Ganará el número del primer papel que se extraiga. Si Inés compró tres números, ¿cuál es la probabilidad de que gane el premio?

Expliquen en el grupo como calcularon cada una de las probabilidades anteriores.

Pistas

1. Consideren las siguientes sugerencias y preguntas, pueden ser útiles para resolver el Reto.
   - ¿Cuáles son los experimentos aleatorios en las situaciones de Efrén, Lorena e Inés?
   - ¿Cuáles son los posibles resultados en cada una de esas experiencias?
   - En las situaciones descritas en el Reto, ¿hay datos que indiquen que se han repetido los experimentos?
   - En cada uno de los experimentos descritos, ¿consideran que los diferentes resultados serán igual de frecuentes?, ¿o que se observarán con distintas frecuencias?

Para analizar

Un nuevo reto

1. Reúnete con dos compañeros, lean el Reto y hagan lo que se indica. Para ello, usen solamente la información que se proporciona; no lleven a cabo ninguna observación o repetición de los experimentos aleatorios.

En la escuela Juan de la Barrera va a elegirse un alumno del grupo de segundo A para dar un discurso y en el grupo hay 30 alumnas y 15 alumnos.

a) Respondan las siguientes preguntas.
- En el grupo hay 30 alumnas y 15 alumnos, ¿cuántos alumnos y alumnas son en total en el grupo? ____________________
- De ese total, ¿cuántas son alumnas? ____________________
- ¿Cuál es la probabilidad de que se elija una alumna? Expliquen ____________________

____
- ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione a un alumno?

____

b) El día que va a hacerse la elección, las cinco alumnas del grupo A que participan en el equipo de gimnasia femenil están ausentes. La selección debe hacerse solo con el alumnado que esté presente.
- ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccione un alumno? ____________________
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea una alumna? ____________________

c) Consideren que se va a escoger al alumno del grupo por sorteo, de manera que dependa del azar; por ejemplo, pueden numerarse todos los alumnos, se anotan en tarjetas y se saca una.
- ¿Cada alumna y cada alumno tiene la misma probabilidad de ser elegido o hay diferentes probabilidades? ____________________

  ____
- ¿Cuántos alumnos y alumnas hay en el grupo A y cuál es el total de matrícula del grupo en cada situación, grupo completo o sin alumnas gimnastas?

  ____
- ¿De cuántas maneras se puede seleccionar a quien dará el discurso, es decir, cuántos posibles resultados hay de seleccionar una de las tarjetas mencionadas?

  ____

- ¿Cuántas son de alumnas y cuántas son de alumnos? ______

d) Comparen y comenten en el grupo y con su profesor, los procedimientos y respuestas de los equipos.

Formalización

1. Lee la información y contesta.

Hay experimentos aleatorios donde unos eventos se observan con más frecuencia que otros. Por ejemplo, en las dos situaciones de la escuela Juan de la Barrera, si se repite varias veces la experiencia de elegir a alguien del grupo.

- ¿Qué resultado consideran que se observaría con mayor frecuencia? ¿alumna o alumno? ¿Por qué?
- Describe otro experimento con eventos cuyas frecuencias sean diferentes ______

También existen experimentos aleatorios donde todos los resultados son igualmente propensos a ocurrir. Por ejemplo, al lanzar un dado muchas veces, si está bien balanceado, la experiencia nos indica que las diferentes caras aparecerán el mismo número de veces: es lo que esperamos obtener si repetimos un gran número de veces el lanzamiento del dado.

Señala un ejemplo de otro experimento cuyos resultados tienden a ocurrir con la misma frecuencia: ______

Cuando todos los diferentes resultados de una experiencia aleatoria se observan con la misma frecuencia, se dice que son resultados equiprobables.

En las situaciones que se presentaron en las secciones Reto y Un nuevo reto, ¿hay datos sobre la repetición de los experimentos? ______

Con la información proporcionada en estos casos, ¿es posible calcular la frecuencia relativa de los eventos y obtener así una estimación de su probabilidad frecuencial? Expliquen.

______

Glosario

Resultados equiprobables. Si cada uno de los posibles resultados de un experimento aleatorio se observa con la misma frecuencia, se dice que son equiprobables. Por ejemplo, "Águila" y "Sol" son equiprobables, porque al lanzar al aire muchas veces una moneda, tienden a observarse aproximadamente con la misma frecuencia.

Cuando tenemos **eventos equiprobables** en un experimento aleatorio, es posible calcular la probabilidad de esos eventos sin necesidad de llevar a cabo el experimento de manera repetida. Por ejemplo, al lanzar un dado:

- ¿Cuáles y cuántos son los posibles resultados? ______
- Si queremos obtener la probabilidad de que salga un 3, por ejemplo, de todos esos resultados posibles nos interesa solo uno; de esta manera, la probabilidad de obtener un 3 al lanzar un dado es de:

$$P\text{ (obtener 3 al lanzar un dado)} = P(3) = \frac{1}{\quad}$$

- La probabilidad de observar otra cara o número cualquiera del dado ¿es igual o diferente? ______
- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar el dado observemos un número impar? ______
- ¿Cuántos de los resultados son impares? ______
- ¿Cuál es el número total de resultados posibles? ______

Entonces la probabilidad de obtener un número impar es de:

$$P\text{ (obtener número impar al lanzar un dado)} = P\text{ (impar)} = \frac{\quad}{6}$$

Este mismo procedimiento se puede aplicar en las demás situaciones de las secciones anteriores. Por ejemplo, en el caso de Lorena, puesto que va a hacer su selección con los ojos cerrados, cada día del mes de noviembre tiene la misma posibilidad de resultar elegido: los posibles resultados son equiprobables. ¿Cuántos son los posibles resultados?

____

Así, la probabilidad de que Lorena seleccione el día 12 de noviembre es:

$$P(\text{escoger día } 12) = \frac{1}{30}$$

De acuerdo con este procedimiento, ¿cuál es la probabilidad de que Inés gane el premio de la rifa? Puede ganar con cualquiera de los tres números que compró; si alguno de ellos sale, entonces ocurre o se observa el evento "Ganar el premio"; se dice que esos tres son *resultados favorables* al evento "Ganar el premio"; en este caso, la probabilidad es de:

$$P(\text{Ganar el premio}) = \frac{3}{\quad}$$

Este procedimiento para calcular la probabilidad de un evento en un experimento aleatorio, donde todos los resultados posibles son equiprobables, se conoce como *probabilidad teórica* o *probabilidad clásica*:

La *probabilidad teórica* o *probabilidad clásica* de un evento E es el cociente del número de resultados favorables a dicho evento, entre el número total de resultados posibles del experimento aleatorio:

$$P(E) = \frac{\text{Número de resultados favorables a } E}{\text{Número de posibles resultados del experimento}}$$

siempre que los resultados del experimento aleatorio sean equiprobables.

2. Lleven a cabo las siguientes actividades por equipos.

El procedimiento de probabilidad teórica se puede utilizar para obtener la probabilidad de un evento, cuando podemos suponer que todos los resultados de la experiencia aleatoria son igualmente probables, debido al diseño o la forma en que se lleva a cabo el experimento, o por las características del instrumento que se utilice para realizarlo.

a) Comparen las dos formas de obtener la probabilidad de un evento; en ambos casos expliquen su respuesta.

- Para calcular la probabilidad teórica de un evento, ¿es necesario llevar a cabo el experimento y registrar sus resultados? ¿cuántas veces? ______________________________
- Para encontrar la probabilidad frecuencial de un evento, ¿es necesario llevar a cabo el experimento y registrar sus resultados? ¿cuántas veces? ______________________________

La probabilidad teórica y la frecuencial también se pueden comparar en cuanto a sus resultados. Para determinar en qué medida se aproximan sus resultados en un caso, obtengamos por medio de ambos procedimientos, la probabilidad de que en la escuela Juan de la Barrera se seleccione una alumna para dar el discurso (ver la primera situación de la sección Un nuevo reto):

b) Probabilidad teórica:

En total hay ____________ alumnos y alumnas en el grupo A; por ser un sorteo, todos tienen la misma posibilidad de ser elegidos.

Los casos favorables al evento "Elegir una alumna" son ________________________.

Así, la probabilidad teórica de que se elija a una alumna es de:

$$P(\text{alumna}) = \frac{\quad}{\quad}$$

c) Probabilidad frecuencial de que salga una alumna:

Puede efectuarse una simulación con lanzamientos de un dado. La fracción de la matrícula que son alumnas es de $\frac{30}{45}$, o de $\frac{2}{3}$ al simplificarla; por ello, $\frac{2}{3}$ de los resultados posibles al tirar el dado deben considerarse que equivalen a observar una alumna; específicamente, cada vez que se tire el dado, el resultado debe registrase de la siguiente manera:

Si el número observado en el dado es:	se registra como resultado del experimento:
1, 2, 3 o 4	Alumna
5 o 6	Alumno

TABLA 29.2 Tabla que indica cómo contar los resultados de una simulación al experimento de extraer una alumna y un alumno, utilizando un dado.

- Repitan el lanzamiento del dado al menos 30 veces.
- Con las frecuencias que anoten, calculen la probabilidad frecuencial de elegir una alumna.
- Comparen las probabilidades frecuenciales de los diferentes equipos.
- ¿Qué tanto se aproximan los diferentes cálculos de la probabilidad clásica que se obtuvo previamente? ________________________
- Reúnan los datos de frecuencias de todos los equipos, así como el total de veces que se repitió el experimento.
- Calculen una nueva probabilidad frecuencial, esta vez con la información de todo el grupo. ¿Ahora se acerca más la probabilidad obtenida por la definición teórica a la probabilidad frecuencial? Comparen y expliquen.
- La probabilidad frecuencial se ha estudiado desde primer grado. ¿Qué sucede con la probabilidad frecuencial cuando se repite el experimento aleatorio un número de veces cada vez mayor? ________________________

Expliquen ______________________________

- Elaboren en el equipo un resumen sobre las diferencias y similitudes entre la probabilidad teórica y la probabilidad frecuencial de eventos en un experimento aleatorio. Expliquen y compartan con otros equipos.

d) Comenten entre equipos y con su profesor sus procedimientos, resultados y conclusiones.

TIC

1. Realicen las siguientes actividades por parejas.

Vamos a obtener la probabilidad de un evento de forma teórica y frecuencial, y observaremos en qué grado se aproximan estos dos valores.

a) Obtengan la probabilidad teórica de que Efrén extraiga de su mochila, la memoria USB que contiene sus fotografías (Ver la primera situación de la sección Reto):

$$P(\text{memoria con fotos}) = \frac{\quad}{\quad}$$

b) En primer grado se utilizó una hoja electrónica de cálculo, para simular los lanzamientos de un dado; ahora usaremos el mismo procedimiento para simular sucesivas extracciones de memorias de la mochila de Efrén; para ello, hagan lo siguiente:

- Escriban en una celda de su hoja de cálculo el texto "Memoria extraída:".
- En la celda a su derecha introduzcan la instrucción: =ALEATORIO.ENTRE(1;5) [menú Fórmulas]; esta instrucción presenta en la celda elegida, un número aleatorio entero del 1 al 5, cada vez que se oprima la tecla F9.
- Asignen un número a la memoria con las fotos; por ejemplo, la número 1.
- Efectúen 50 extracciones de memorias de la mochila, apretando cada vez la tecla F9, y anotando si salió la 1 o alguna otra.
- Con estos datos, calculen la probabilidad frecuencial de que se observe la memoria 1, la que contiene las fotos:

$$P(\text{memoria con fotos}) = \frac{\quad}{\quad} \text{ (50 extracciones)}$$

- Continúen realizando extracciones, hasta llegar a 100; vayan acumulando los datos a las primeras 50, y calculen nuevamente la probabilidad frecuencial:

$$P(\text{memoria con fotos}) = \frac{\quad}{\quad} \text{ (100 extracciones)}$$

- Comparen ahora la probabilidad teórica o clásica obtenida, con las dos estimaciones de probabilidad frecuencial.
  ¿Qué tan cercanos son los valores obtenidos, de la teórica con la primera y con la segunda frecuencial?

c) Si no disponen de una hoja de cálculo en una computadora, se pueden realizar las repeticiones del experimento con otros dispositivos. Algunas calculadoras científicas, así como algunos teléfonos celulares, tienen una tecla con la cual se generan números aleatorios. Generalmente al apretar la tecla correspondiente (marcada como *"Rand"*, *"Ran#"* o un nombre similar), se presenta en pantalla un número aleatorio decimal entre 0 y 1. Para simular la extracción de una memoria de la mochila, se necesita un número entero del 1 al 5.

- Aprieten la tecla que genera el número aleatorio decimal.
- Multipliquen el número de la pantalla por 5.
- A lo que resulte, súmenle 1.
- Tomen solo la parte entera del número resultante.
- Ese es el número entero aleatorio del 1 al 5.
- Para cada repetición del experimento, se efectúan las operaciones anteriores.
- Al igual que cuando se usó la hoja de cálculo, se acumulan datos de 50 y de 100 extracciones y se calculan las probabilidades frecuenciales correspondientes; se comparan y analizan los valores obtenidos con la probabilidad teórica.

d) Comenten sobre esta actividad entre parejas y con su profesor.

¡A practicar!

1. Para ir a la escuela cada día, Casimiro escoge un par de calcetines de un cajón. Tiene dos colores: verdes y azules, todos del mismo tamaño y textura, y los guarda por pares, mezclando los colores. Como se levanta muy temprano, no enciende la luz para no despertar a su hermano y toma un par de calcetines sin distinguir de qué color son.

a) ¿Cada par de calcetines tiene la misma posibilidad de ser seleccionado? Explica.

b) Si un día tiene en su cajón siete pares de calcetines verdes, y dos de azules.

- ¿Cuál es la probabilidad de que saque un par verde?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ese día use un par de azules?

c) Otro día Casimiro cuenta con cinco pares de calcetines azules, cuatro verdes y le regalan tres de color rojo.

- ¿Cuáles son los resultados posibles de sacar un par de calcetines del cajón?
- ¿Puede salir un par de color negro?
- ¿Cuántos resultados favorables hay para los calcetines de cada color?
- ¿Cuál es la probabilidad de que Casimiro extraiga un par verde?
- Calcula también la probabilidad de que escoja azul, y la probabilidad para uno rojo.

d) Para aumentar o disminuir la probabilidad de sacar un par de calcetines de un color determinado, ¿qué puedes sugerirle a Casimiro?

2. En una feria, uno de los juegos consiste en tirar dardos a ruedas que giran a gran velocidad. Las diferentes ruedas con las que se puede jugar son las siguientes:

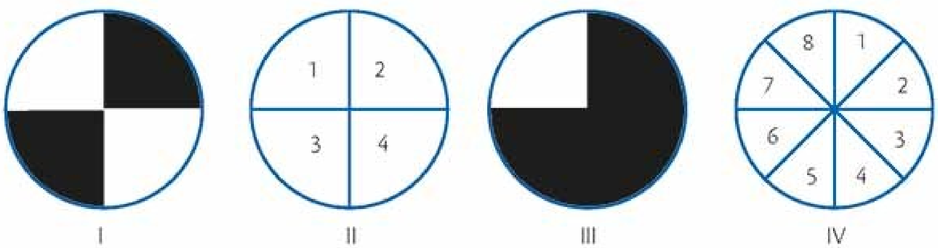


FIGURA 29.1 Ruedas para tirar dardos.

a) ¿Cuáles son los posibles resultados en cada una de ellas?
b) ¿En todas ellas los diferentes resultados posibles son equiprobables?
c) Cuál es la probabilidad de que tu dardo caiga sobre color negro:
   - En la rueda (I)
   - En la rueda (III)
d) ¿Cuál es la probabilidad de acertarle al número 2 en la rueda (II)?
   - ¿Cuál es la probabilidad de acertarle al número 2 en la rueda (IV)?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que el dardo caiga en el número 7 en la rueda (II)?
   - ¿Cuál es la probabilidad de que el dardo caiga en el número 7 en la rueda (IV)?
e) ¿Cuál es la probabilidad de que en la rueda (IV) el dardo que lances caiga en un número mayor que 5?

3. Compara la probabilidad teórica y frecuencial de la segunda situación que se presentó en la sección Un nuevo reto, donde están ausentes cinco de las alumnas del grupo.
   a) Escribe cuáles fueron las probabilidades teóricas de seleccionar una alumna y de escoger a un alumno.
   b) Utilizando un recurso tecnológico (puedes usar la instrucción que se utilizó en la sección TIC adaptando el número de alumnos y alumnas que hay: son en total 40 de matrícula, 25 alumnas y 15 alumnos):
      - Determina las probabilidades frecuenciales con 50 y con 100 repeticiones del experimento.
      - Compara las probabilidades frecuenciales con la probabilidad teórica.
      - ¿En qué caso lograron una aproximación más cercana?

Para terminar

1. Revisa tus materiales de trabajo de esta lección; escribe qué habilidades y conocimientos adquiriste o recordaste sobre probabilidad teórica y probabilidad frecuencial de un evento. Si te quedaron dudas, anota en que tema o aspecto fue y coméntalo con tu profesor.

2. Por parejas resuelvan lo siguiente.
   Encuentra la probabilidad de qué, al tomar una carta al azar de una baraja inglesa de 52 cartas, esta sea:
   a) Un trébol.
   b) Un As.
   c) De color rojo.
   Expliquen a otro equipo su procedimiento.

Portafolio de evidencias

Agrega a tu portafolio de evidencias la solución al Reto de esta lección, así como tu solución a alguno de los ejercicios de la sección ¡A practicar!

Evaluación

del Trimestre 3

Autoevaluación

Aprendizajes esperados	Sin dificultad	Con dificultad	Necesito ayuda
Calculo el volumen de prismas y cilindros rectos.			
Recolecto, registro y leo datos en histogramas, polígonos de frecuencia y gráficas de línea.			
Uso e interpreto las medidas de tendencia central (moda, media aritmética y mediana), el rango y la desviación media de un conjunto de datos y decido cuál de ellas conviene más en el análisis de los datos en cuestión.			
Determino la probabilidad teórica de un evento en un experimento aleatorio.			

Evaluación

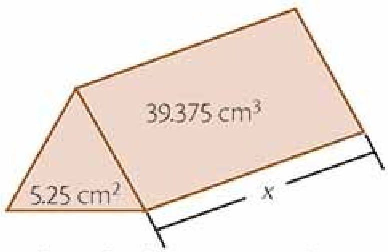
De manera individual, resuelve los siguientes problemas:

1. ¿Cuánto mide el volumen de un silo de forma cilíndrica con 10 m de altura y radio de 3 m? (Con $\pi = 3.14$).

a) 94.2 m^3 **b)** 141.3 m^3 **c)** 188.4 m^3 **d)** 282.6 m^3

2. La siguiente barra de chocolate tiene un volumen de 39.375 cm^3, si la superficie de la base es de 5.25 cm^2. ¿Cuánto mide de largo?

a) 5.25 cm
b) 7.5 cm
c) 9.25 cm
d) 10.5 cm



3. En la gráfica siguiente se muestra el importe de las cuentas de un fin de semana en el restaurante "El mil amores".

a) ¿En qué intervalo de clase están los importes de cuentas más bajos, y en cual los más altos?

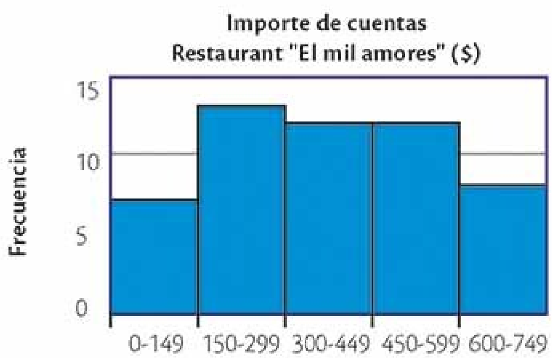
______

b) ¿En qué intervalo se encuentra la parte media o central de los datos?

______

c) ¿En qué intervalo es mayor la frecuencia de datos, es decir en cuál se observan más importes de cuentas?

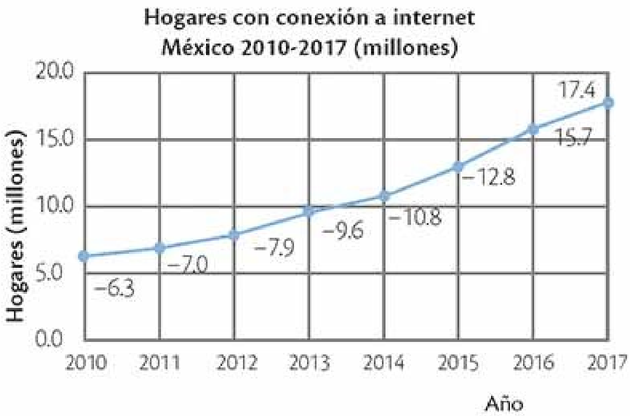
______



d) ¿Cómo se distribuyen las cuentas, dónde hay más datos: en intervalos menores o mayores al del centro?

____

4. El número de hogares con conexión a internet en México ha evolucionado entre 2010 y 2017 como se muestra en la gráfica siguiente:



(Fuente: http://www.beta.inegi.org.mx/temas/ticshogares/; fecha de consulta: 30 de abril de 2018).

- ¿Cuál fue el aumento en hogares con internet de 2010 a 2017?

a) 6.5 millones **c)** 10.4 millones
b) 9.4 millones **d)** 11.1 millones

e) ¿En qué año aproximadamente se duplicó el número de hogares con conexión a internet que había en 2010?

a) 2013 **b)** 2014 **c)** 2015 **d)** 2017

- ¿En qué año fue mayor el incremento en hogares con internet en el país? Explica brevemente.

____

5. Para el siguiente conjunto de datos, encuentra las medidas de tendencia central y de dispersión.

23, 28, 0, 35, 38, 14, 24, 0, 28, 27, 40, 24, 35, 0, 28, 31

- Media aritmética

a) 23.44 **b)** 27.5 **c)** 28.85 **d)** 40.9

- Mediana

a) 27.5 **b)** 28.0 **c)** 29 **d)** 42.0

- Moda

a) 0 **b)** 28 **c)** 0 y 28 **d)** 40

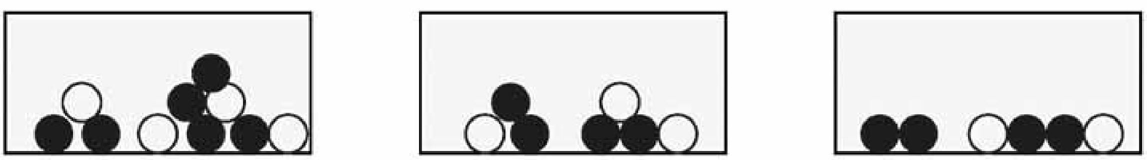
- Rango

a) 40 **b)** 10 **c)** 27.5 **d)** 23.44

- Desviación media

a) 40 **b)** 10 **c)** 27.5 **d)** 23.44

6. Vas a sacar una canica de una de las cajas, sin ver. Las cajas se tapan y las canicas se mezclan antes de tomar una. Ganas si la canica que tomaste es blanca. ¿De cuál caja prefieres sacar la canica?



Caja 1 **Caja 2** **Caja 3**

a) Caja 1 **c)** Caja 3
b) Caja 2 **d)** Cualquier caja, da igual

Bibliografía

Para el alumno

Chalela, Adriana. (2010). *Repugnante y nutritiva.* México, Océano Travesía, Libros del Rincón.

De la Herrán, José. (2007). *Física y Música.* México: ADN ,Editores, Libros del Rincón.

Glover, David. (2013). *La caverna de los piratas.* México: Montena, Libros del Rincón.

Perelman, Y. (1986). *Álgebra recreativa.* Moscú: MIR.

Perelman, Y. (1986). *Aritmética recreativa.* Moscú: MIR.

Perelman, Y. (1989). *Matemáticas recreativas 1.* México: Ediciones Roca.

Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Polya, G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.

Reséndiz Rodea, Andrés. (2013). *Del cacao al peso: La historia y la tecnología detrás del dinero en México.* México: Trilce, Libros del Rincón.

Tahan, M. (1994). *El hombre que calculaba.* México: Noriega.

Varios. (2011). *Las "nanoaventuras" del maestro Fonseca.* México: Abdo Producciones, Libros del Rincón.

Watson, Richard. (2011). *Mentes del futuro. ¿Está cambiando la era digital nuestras mentes?* Barcelona: Viceversa, Libros del Rincón.

Para el maestro

Bello, I. (1999). *Álgebra elemental.* S/d: International Thomson Editores.

Colegio Nacional de Matemáticas. (2008). *Matemáticas simplificadas.* (Segunda edición). México: Pearson.

Courant, R. y Robbins, H. (1962). *¿Qué es la matemática?* Madrid: Aguilar.

Díaz G. J., Batanero, M. C. y Cañizares, M. J. (1996). *Azar y probabilidad.* Madrid: Síntesis.

De la Peña, J. A. (1999). *Álgebra en todas partes.* México: Fondo de Cultura Económica.

De la Peña, J. A. (Compilador). (2002). *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México.* México: Siglo XXI-UNAM.

Editorial Planeta. (1992). *Nueva Enciclopedia Temática Planeta. Matemáticas.* Barcelona: Planeta.

Fendel, D., Resek, D., Alper, L. y Fraser, S. (1997). *Interactive Mathematics Program.* Berkeley: Key Curriculum Press.

Filloy, E. (1998). *Didáctica e historia de la geometría euclidiana.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E. (1998). *Didáctica e historia de la geometría euclidiana.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E. (Coordinador). (2003). *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual.* México: Fondo de Cultura Económica-Cinvestav.

Grupo Azarquiel. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Madrid: Síntesis.

Gustafson, D. R. (1997). *Álgebra intermedia.* S/d: International Thomson Editores.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros.* Madrid: Síntesis.

Orton, A. (2003). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: Ediciones Morata-Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

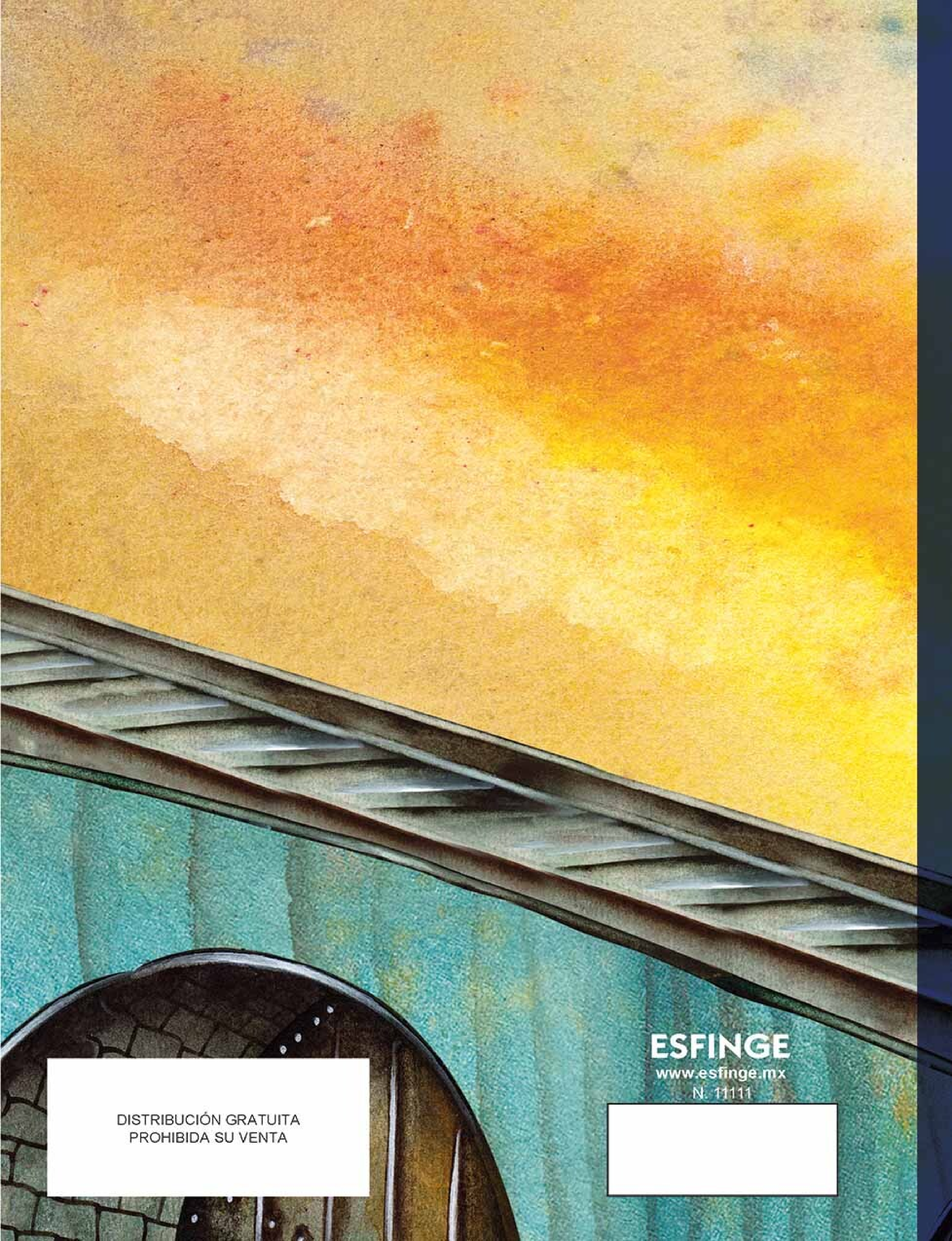
Parra, C. y Saiz, I. (Compiladoras). (1994). *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires: Paidós.

Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de Estudio 2011. Educación básica. Secundaria. Matemáticas.* México.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. M. y Hernández, J. (1996). *Iniciación al álgebra.* Madrid: Editorial Síntesis.

Triola, M. F. (2006). *Estadística. (Novena edición).* México: Pearson.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa.* México: Trillas.



ESFINGE
www.esfinge.mx
N. 11111